

Partiel Math 6

3 juin 2009

–Durée 2h.–

Les correcteurs tiendront largement compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. On considère une fonction holomorphe d'un ouvert U connexe de \mathbb{C} contenant 0 à valeurs dans \mathbb{C} et vérifiant

$$\forall z \in U, \Im f(z) = 1 - \Re f(z)$$

et $f(0) = 1$. Déterminer f .

Exercice 2. Donner la valeur de l'intégrale $\int_{C(0,1)} \bar{z} dz$, puis $\int_{C(0,1)} z dz$.

Exercice 3. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 4 orienté dans le sens direct. Soit

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2}.$$

1. Sur quel ouvert de \mathbb{C} la fonction f est-elle holomorphe ?
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{z^2 - \pi^2}$.
3. En utilisant la formule de Cauchy, déterminez

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Exercice 4. Soit R un réel différent de 1, et γ_R le cercle de centre 2 et de rayon R orienté dans le sens direct. Soit $f(z) = \frac{\exp(2z)}{(z-1)^3}$. En utilisant la formule de Cauchy, déterminez en fonction de R la valeur de l'intégrale

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z) dz.$$

Exercice 5. Soit a un réel, et $f(z) = \frac{\exp ia z}{z^2 + 2z + 2}$. On désigne par γ_R le circuit défini par la réunion du segment réel $[-R, R]$ (parcouru de gauche à droite) avec le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R , parcouru dans le sens direct.

1. Sur quel ouvert de \mathbb{C} la fonction f est-elle holomorphe ?
2. En utilisant le théorème des résidus, trouver la valeur de l'intégrale $I_R = \int_{\gamma_R} f(z) dz$.
3. Montrer que si γ_R^+ est le demi-cercle supérieur de rayon R et de centre 0, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^+} f(z) dz = 0.$$

4. En déduire la valeur de l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 2x + 2} dx.$$