L2 Math 3 **2009-2010**

RECUEIL D'ÉXERCICES

Partie I : ANALYSE

SUITES

Exercice 1 Etudier les suites (u_n) dont le terme général est donné par :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$
4. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$
5. $u_n = n^2 \sin(\dfrac{1}{3^n})$
6. $u_n = \sqrt[n]{n+1}$
7. $u_n = (1 - \dfrac{1}{n})^n$
8. $u_n = n \sin(\dfrac{2}{n})$
9. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b > 0$
10. $u_n = \dfrac{n^2}{e^n}$

SÉRIES

Exercice 2 Donner la nature des séries de terme général :

1. $u_n = q^n$
2. $u_n = \dfrac{1}{4^n \ln(2 + \frac{1}{n})}$
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
4. $u_n = (a + \dfrac{1}{n})^n$
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$
6. $u_n = (1 + \sqrt{n})^{-n}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n})$
8. $u_n = n^{\alpha+1}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
10. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$. Calculer S_{2n}, puis en déduire la somme de cette série.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries suivantes convergent-elles ? Calculer leur somme lorsque $\alpha = 1$.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (n-1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha}$

Exercice 4 En exprimant $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n}^{\infty} u_n$.

SUITES DE FONCTIONS

Exercice 5 On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (1 + nx)^2}$.

1. Démontrer que cette suite converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ ne contenant pas 0.

Exercice 6 On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^2 e^{-nx}}{n^\alpha}$.

1. Etudier selon les valeurs de α la convergence simple de cette suite sur $\mathbb{R}$.

2. Sur quels intervalles y-a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 7 Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ sur $[0,1]$,
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ sur $[0,1]$,
3. $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}^+$,
4. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ sur $[0,\pi]$,
5. $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$,
6. $f_n(x) = (-1)^n x^n(1-x)$ sur $[0,1]$,
7. $f_n(x) = \sin(\dfrac{nx}{1+nx})$ sur $\mathbb{R}^+$.

SÉRIES DE FOURIER

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique donnée sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = x$.

1. Représenter la fonction f sur $]-3\pi, 3\pi]$ et calculer $f(4)$.
2. Déterminer la série de Fourier de la fonction f. On notera $Sf(x)$ la somme de cette série.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a t on $Sf(x) = f(x)$?
4. Déduire de la question précédente la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
5. Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire donnée sur $[0,\pi]$ par $f(x) = 3x - 2\pi$.

1. Représenter la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$ et exprimer $f(x)$ pour $x \in [\pi, 2\pi]$.
2. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la fonction f est elle dérivable ?
3. Déterminer la série de Fourier de la fonction f.
4. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
5. (a) Montrer que la somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin^2((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $g(x)$ la somme de la série précédente. Exprimer $g(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 10 Préciser le disque de convergence des séries entières à variable complexe suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n}} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n}$

Exercice 11 Préciser l'intervalle de convergence des séries entières à variable réelles suivantes, avec étude aux extrémités de l'intervalle :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n2^n}$

Exercice 12 Exprimer la somme de chaque série entière sur son disque de convergence que l'on précisera :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)z^{3n+2}$

Exercice 13 Soit $u(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-2)}$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Calculer $u(x)$. (Indication : on pourra calculer tout d'abord $u'(x)$.)

Exercice 14 Donner les développements en série entière en 0 des fonctions à variable réelle suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$
3. $f(x) = \arcsin(x)$

Exercice 15 Donner les développements en série entière en x_0 des fonctions à variable réelle suivantes :

1. $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = \pi/2$
2. $f(x) = 1/x^2$ en $x_0 = 1$

Exercice 16 Soit l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

1. A l'aide d'une série entière, trouver une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation.
2. A l'aide du changement de fonction $y = zu$, trouver la solution générale de l'équation sur $]0, 1[$.

Exercice 17 Soit l'équation différentielle $(x^2 + x)u'' + (1 + 3x)u' + u = 0$. Sur $]0; 1[$, trouver une solution particulière u développable en série entière puis la solution générale de la forme $y = zu$.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 18 On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. On considère $\phi : D \to D$ définie par $\phi(x, y) = (u, v)$ avec $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$.

1. Montrer que la fonction ϕ est un difféomorphisme de D sur D.
2. A l'aide du changement de variables ϕ, résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y.$$
3. Quelle est la solution de l'équation qui vérifie $f(1, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, y) = \sin y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$?

Exercice 19 On considère l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4y. \tag{E}$$

1. En utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et solutions de l'équation (E).
2. Parmi les solutions trouvées, quelle est celle qui vérifie les conditions supplémentaires $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x,x) = x^2$ et $f(x,-x) = x^3$?

Exercice 20 Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \exp(y). \tag{E}$$

1. Trouver quatre constantes a, b, c, d telles que, après le changement de variables $u = ax+by$, $v = cx + dy$, l'équation (E) devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = g(u,v). \tag{E'}$$

2. Résoudre (E'). Exprimer ensuite le résultat en fonction de x et de y.
3. Trouver la solution de (E) telle que $f(x,0) = 4x^2$ et $f(0,y) = \dfrac{\exp(y)-1}{4}$.

Exercice 21 On note $D =]-\pi/2;\pi/2[\times]-\pi/2;\pi/2[$.

1. On pose $\varphi(x,y) = (u,v)$ avec $u = \sin x$ et $v = \sin y - \sin x$.
   Montrer que la fonction φ est un difféomorphisme de D sur une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ à préciser.
2. À l'aide du changement de variables φ résoudre sur D l'équation

$$\cos x \,.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \cos y \,.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \cos y\ .$$

3. Quelle solution de l'équation vérifie $f(0,0) = 0$ et $\forall y \in]-\pi/2;\pi/2[,\ \frac{\partial f}{\partial y}(-y,y) = \sin(2y)$?

Exercice 22 On considère l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. En utilisant la formule de d'Alembert donner la solution $u(x,t)$ de (E) sur $\mathbb{R} \times [0;+\infty[$ vérifiant les conditions initiales $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x,0) = \sin(2x) \quad$ et $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x\,.$
2. En utilisant le résultat du cours sur la méthode de superposition, donner la solution de (E) sur $[0;l] \times [0;+\infty[$ vérifiant :
   – les conditions aux limites : $\forall t \geq 0\ \ u(0,t) = u(l,t) = 0$
   – les conditions initiales : $\forall x \in [0;1]\ \ u(x,0) = \sin\frac{2\pi x}{l}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l}$.

Exercice 23 On considère l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Par la méthode de séparation des variables, on cherche des solutions de (E) de la forme $u(x,y) = U(x)V(y)$. Montrer alors que les fonctions $U(x)$ et $V(y)$ sont solutions d'équations différentielles $U''(x) - k\,U(x) = 0$ et $V''(y) + kV(y) = 0$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. On choisit $k > 0$ et on note $k = \omega^2$ avec $\omega > 0$. Résoudre les équations différentielles trouvées en 1 et en déduire des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.
3. Parmi les solutions trouvées en 2 figurent les fonctions $u_n(x,y) = e^{-nx}\sin(ny)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a pris $\omega = n$). Par la méthode de superposition, on cherche alors une solution de (E) de la forme

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nx}\sin(ny)\ .$$

Comment choisir les coefficients a_n pour avoir $\forall y \in]-\pi;\pi[\quad u(0,y) = y$? Justifier alors la convergence de la série définissant la fonction $u(x,t)$ pour $x \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Nous admettrons que cette fonction est solution de (E) sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

Partie II : ALGÈBRE LINÉAIRE

ENDOMORPHISMES ET MATRICES

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, sous-espaces de E. Quel est le rang de f ?

2. On note $\epsilon_1 = e_1 + e_3$, $\epsilon_2 = e_1 - e_3$, et $\epsilon_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $B' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de E. Préciser la matrice de passage P de B à B', ainsi que la matrice inverse P^{-1}.

3. Exprimer $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), f(\epsilon_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice D de f dans la base B'.

4. Vérifier la rélation $D = P^{-1}AP$.

5. Pour tout entier $n \geq 1$ exprimer la matrice A^n.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. On définit $f : E \to E$ par

$$f(P(X)) = P(X) + XP'(X),$$

où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivée de $P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Donner la matrice de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$. de E.

3. Déduire de 2) que f est une bijection et préciser $f^{-1}(P(X))$ pour

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$

4. Généraliser l'exercice en remplaçant $E = \mathbb{R}_3[X]$ par $E = \mathbb{R}_n[X]$ pour $n \geq 1$.

Exercice 3 Avant de résoudre le système linéaire (S) on précisera les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système est de Cramer.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & \alpha z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base $B' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ dans laquelle la matrice de F est une matrice diagonale D que l'on précisera.
2. Donner les équations dans la base B de 3 plans vectoriels de E stables par f.

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Exercice 5 1. Trouver une base $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et préciser une matrice diagonale D semblable à A.

2. Donner la matrice de passage P de la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$ à la base B' et calculer P^{-1}.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
   En remarquant que pour tout $n \geq 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geq 2$.

Exercice 6 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_B(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Trouver une base orthonormée $B' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_B(f)$ soit diagonale et donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.

Exercice 7 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. On note $e_1 = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$ et $e_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$.

1. Montrer que $B' = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Préciser la matrice de passage P de la base B à la base B'. Vérifier que ${}^tP = P^{-1}$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $M_B(f) = P$, donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.
3. On note Ox et Oy les axes de $\mathbb{R}^2$ portant le repère (O, e_1, e_2). Représenter l'hyperbole H ayant pour équation $3X^2 - Y^2 = 3$ dans le repère (O, e_1, e_2).
4. Quelle est l'équation de H dans le repére canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les points d'intersection de H avec les axes Ox et Oy du repère canonique.

Exercice 8 Soit Γ la conique du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ ayant pour équation dans le repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy + 8x + 8\sqrt{3}y - 12 = 0$$

Trouver l'équation réduite de Γ et représenter Γ.

Partie III : ANNALES

PARTIEL du 14 novembre 2007 - 2 heures, sans documents

Exercice 1. Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière, et qu'on suppose de rayon de convergence $R > 0$ ou infini. Trouver une relation entre a_{n+2} et a_n. En déduire pour tout

entier p la valeur de a_{2p} en fonction de a_0 et de p.

2. Montrer qu'il existe une solution DSE $u(x)$ qui vérifie $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$. Quel est son rayon de convergence ? Exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 Soit la suite de fonctions définie pour tout n par : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2x + nx^4}{x^2 + n^4}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Soit la série de fonctions $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que s converge normalement sur $[0, 1]$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π périodique donnée sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Pour $\alpha = 1/2$, représenter le graphe de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. On suppose à partir de maintenant que $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Déterminer la série de Fourier Sf de f. On prendra garde au fait que α n'est pas un entier. *Indication* pour les calculs : on pourra utiliser, sans la redémontrer, l'égalité
$$2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b).$$
3. En quels points de $\mathbb{R}$ la série Sf converge-t-elle simplement ? Que vaut alors $Sf(x)$?
4. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a
$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Exercice 4 Soit l'équation aux dérivées partielles (E) en les variables $(x, y) \in U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On considère le changement de variables $u = xy^2$ et $v = y$ (on admet que ce changement de variables est un difféomorphisme de U dans U, et on ne cherchera pas à le démontrer).

1. Soit F la fonction définie par $F(u, v) = f(x, y)$. Déterminez $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de F, u et v.
2. En déduire l' équation aux dérivées partielles vérifiée par F, et la résoudre, toujours en u et v.
3. Déterminez toutes les solutions de (E).

EXAMEN FINAL du 8 janvier 2007, sans documents

Exercice 1. Soit $L > 0$ un réel fixé dans toute la suite, et (E) l'équation aux dérivées partielles suivante, et dont l'inconnue est $u(x, t)$:

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

1. Soit $u(x,t)$ une solution définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et s'écrivant $u(x,t) = f(x)g(t)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{aligned} g'(t) - \lambda t g(t) &= 0 \qquad (1) \\ f''(x) - \lambda f(x) &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

   Pour cela, on ne justifiera pas les divisions éventuellement dangereuses.
2. Donner la solution générale de l'équation (1).
3. On suppose à partir de maintenant que $\lambda < 0$, et on définit le réel ω par $\lambda = -\omega^2$. Donner la solution générale de l'équation (2).
4. On suppose dorénavant que la solution vérifie les conditions $u(0,t) = u(L,t) = 0$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une solution $u_n(x,t)$ de (E) de la forme

$$u_n(x,t) = e^{-\alpha n^2 t^2} \sin(n\beta x),$$

   avec α et β des constantes non nulles que l'on déterminera en fonction de L.
5. On cherche maintenant une solution de la forme $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$, où pour tout n, a_n est une constante réelle, et telle que u vérifie la condition initiale

$$u(x,0) = \sin(\frac{2\pi x}{L}) + 3\sin(\frac{6\pi x}{L}).$$

   Quelle est la solution $u(x,t)$? (Indication : les calculs compliqués sont inutiles).

Exercice 2. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = Mat(f, B, B) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez les valeurs propres de f. L'application f est-elle inversible ?
2. Trouver une base B' de vecteurs propres, telle que

$$D = Mat(f, B', B') = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

   où a et b sont des réels qu'on déterminera.
3. Donner la matrice de passage P de B à B', puis la matrice de passage P' de B' à B.
4. Exprimer A en fonction de D, P et P', puis calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3. On considère dans le repère orthonormé canonique $\mathcal{B} = (O, i, j)$ la conique d'équation

$$6x^2 + 9y^2 + 4xy - 4\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0.$$

1. Déterminez une base orthonormée B' de vecteurs propres de la matrice symétrique associée à la forme quadratique $q(x,y) = 6x^2 + 9y^2 + 4xy$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique à B', puis les coordonnées (x,y) dans la base B en fonction des coordonnées (X,Y) dans la base B'.

3. En déduire un nouveau repère affine orthonormé $\mathcal{B}' = (\omega, e_1, e_2)$ dans lequel la conique s'écrit $aX'^2 + bY'^2 = 1$, où a et b sont des constantes que l'on déterminera, et (X', Y') les coordonnées affines dans $\mathcal{B}'$. Quelle est la nature de la conique ?
4. Dans le repère $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter le repère $\mathcal{B}'$ ainsi que la conique obtenue.

EXAMEN partiel novembre 2008, sans documents

Exercice 1. Soit $f(z)$ la série entière définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} z^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Pour quels points du cercle de convergence la série converge-t-elle ?
3. En utilisant un encadrement simple de $e^{\sqrt{n}}$, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{e}[$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-ex}.$$

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $f(x) = e^x$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que $8 < e^\pi < 81$.
2. Représentez le graphe de la fonction sur $[-3\pi, 3\pi]$. On choisira pour e^π la valeur approchée 23.
3. En intégrant deux fois par partie, déterminer les coefficients a_n de la série de Fourier $Sf(x)$ associée à f.
4. En limitant les calculs, montrer que $b_n = -na_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire b_n et Sf.
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = Sf(x)$?
6. Déterminer la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 3. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} e^{-x} - \frac{\partial f}{\partial y} e^{-y} = 2e^x,$$

qu'on cherche à résoudre pour x et y dans $\mathbb{R}$.

1. Soit le changement de variables $u = e^x$ et $v = e^x + e^y$. Montrer que l'application $\phi(x, y) = (u, v)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ v > u > 0\}$, puis que c'est un difféomorphisme.
2. Soit $F(u, v) = f(x, y)$. Déterminez les dérivées partielles de f en fonction de celles de F.
3. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par F.
4. En déduire la forme générale de F, puis de f.
5. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, x) = 5e^{2x}$. En déduire f.

EXAMEN final janvier 2009, sans documents

Exercice 1 (3 points). Soit α un réel et $f(x)$ la série entière réelle définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. En fonction de α, déterminer en quels points de l'intervalle de convergence la série entière converge. Dans quel(s) cas y-a-t-il convergence absolue ?
3. Si $\alpha < -1$, montrer qu'il existe un intervalle fermé maximal sur lequel f converge normalement, et le déterminer.

Exercice 2 (6 points). Soit $B = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, a un réel, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = Mat(f, B, B) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1-a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. Déterminer le noyau de f en fonction de a. En donner une base.
   On suppose à partir de maintenant que $a \neq 1$.
3. Trouver une base B' de vecteurs propres, telle que
   $$D = Mat(f, B', B') = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$
   où α et β sont des réels qu'on déterminera en fonction de a.
4. Donner la matrice de passage P de B à B', puis la matrice de passage P' de B' à B.

Exercice 3 (7 points). On considère dans le repère orthonormé canonique $\mathcal{B} = (O, i, j)$ la conique d'équation

$$x^2 + y^2 - 2xy + \frac{3}{\sqrt{2}}x - \frac{5}{\sqrt{2}}y + 3 = 0.$$

1. Déterminer les points d'intersection de la conique avec les axes (Ox) et (Oy).
2. Déterminer une base orthonormée B' de vecteurs propres de la matrice symétrique associée à la forme quadratique $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$.
3. Donner la matrice de passage de la base canonique à B', puis les coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées (X, Y) dans la base B'.
4. En déduire un nouveau repère affine orthonormé $\mathcal{B}' = (\omega, e_1, e_2)$ dans lequel l'équation réduite de la conique est une parabole de sommet ω. On prendra soin de donner les coordonnées de ω dans $\mathcal{B}$. Déterminer cette équation réduite dans les nouvelles coordonnées X' et Y'.

5. Dans le repère $\mathcal{B} = (O, i, j)$, représenter le repère $\mathcal{B}'$ ainsi que la conique obtenue.

Exercice 4 (4 points). Soit $T > 0$ un réel fixé dans toute la suite, et (E) l'équation aux dérivées partielles suivante, et dont l'inconnue est $u(x,t)$:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1. Soit $u(x,t)$ définie sur $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ une solution s'écrivant $u(x,t) = f(x)g(t)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{aligned} f'(x) - \lambda x^2 f(x) &= 0 \qquad (3) \\ g''(t) - \lambda g(t) &= 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

   Dans cette question 1 et la suivante, on ne s'inquiétera pas d'une éventuelle division par zéro.
2. Donner la solution générale de l'équation (1).
3. On suppose à partir de maintenant que $\lambda < 0$, et on définit le réel ω par $\lambda = -\omega^2$. Donner la solution générale de l'équation (2).
4. On suppose que la solution vérifie les conditions $u(x,0) = u(x,T) = 0$. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une solution $u_n(x,t)$ de (E) de la forme

$$u_n(x,t) = e^{\gamma n^2 x^\alpha} \sin(n\beta t),$$

   avec α, β et γ des constantes non nulles que l'on déterminera en fonction de T.