CORRIGÉ DE L'EXAMEN FINAL MATH 3.

Exercice 1

1. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & -8 & 4 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 1 & 6 & -x \end{vmatrix}$ On développe par rapport à la $2^{ème}$ ligne :
$= (3-x)\begin{vmatrix} -x & 4 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (3-x)(x-2)(x+2)$

On a donc 3, 2 et -2 comme valeurs propres. (χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable).

3. $(x\,y\,z) \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -8y+4z = 3x \\ 3y = 3y \\ x+6y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6y-3z=0 \\ 18y-9z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=2y \end{cases}$

Donc $E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \varepsilon_3$

$(x\,y\,z) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -8y+4z = 2x \\ 3y = 2y \\ x+6y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2z \end{cases}$ $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_2$

$(x\,y\,z) \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} -8y+4z = -2x \\ 3y = -2y \\ x+6y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=0 \end{cases}$ $E_{-2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_1$

2. 0 n'est pas v.p donc $\mathrm{Ker}\,A = 0$. Par le th. du rang, $\dim \mathrm{Im}\,A = 3$ donc $A(E) = E$.

4. $B' = \{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\}$ est une base car les sous-espaces propres sont en somme directe, donc $\{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\}$ libre et $\mathrm{Card}\,B' = \dim E = 3 \Rightarrow B'$ base.

$A\varepsilon_1 = -2\varepsilon_1$, $A\varepsilon_2 = 2\varepsilon_2$ et $A\varepsilon_3 = 3\varepsilon_3$ donc $\mathrm{Mat}(f; B'; B') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{cases} -2x+2y = x' \\ z = y' \\ x+y+2z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y = \frac{x'}{2} \\ x+y = z'-2y' \\ z = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(-\frac{x'}{2}+z'-2y'\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{2}+z'-2y'\right) \\ z = y' \end{cases}$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\frac{1}{\gamma^n} D^n = \begin{pmatrix} (\alpha/\gamma)^n & 0 & 0 \\ 0 & (\beta/\gamma)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| = \frac{2}{3} < 1$ et $\left|\frac{\beta}{\gamma}\right| = \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim \frac{D^n}{\gamma^n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

et $\lim \frac{A^n}{\gamma^n} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. $X_n = \frac{1}{\gamma^n} A^n X_0$ d'où $\lim X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_3$.

Exercice 2 1. $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \cos y \end{vmatrix} = e^x\cos y \neq 0$ si $y \in]0;\pi/2[$.

2. $f'_x = F'_u u'_x + F'_v v'_x = F'_u e^x + F'_v e^x$. $\quad f'_y = F'_u u'_y + F'_v v'_y = F'_u \cdot 0 + F'_v \cdot \cos y$.

$\cos y\, f'_x - e^x f'_y = F'_u e^x \cos y + \cancel{F'_v e^x \cos y} - \cancel{e^x F'_v \cos y} = F'_u e^x \cos y$.

$(E) \Leftrightarrow F'_u e^x \cos y = 2u^3 \cos y + 2u^2 \cos y \sin y = 2u^2 \cos y\,(\cancel{u}\, e^x + \sin y)$

D'où $\underline{F'_u = 2uv}$

3. $F = u^2 v + h(v)$ et $\underline{f(x,y) = e^{2x}(e^x + \sin y) + h(e^x + \sin y)}$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1

4. $f'_x = 3e^{3x} + 2e^{2x}\sin y + e^x h'(e^x + \sin y)$. En $(x,0)$ $= 3e^{3x} + e^x h'(e^x) = e^{2x}$

Soit $h'(e^x) = e^x - 3e^{2x}$ et $h'(X) = X - 3X^2$ et $h(X) = \frac{X^2}{2} - X^3$.

D'où $f(x,y) = e^{2x}(e^x + \sin y) + \frac{1}{2}(e^x + \sin y)^2 - (e^x + \sin y)^3$.

Exercice 3 $|a_n| = |\ln n| \neq 0$ si $n \geq 2$. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln (n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 + 1/n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\ln n \to \infty$ donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ et $\underline{R = \frac{1}{1} = 1}$

2. $\phi'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ si $x \geq 1$ d'où

x	1		∞
ϕ'	0	$+$	
ϕ	1	$\nearrow$	

$\phi(x) \geq \underset{\phi(1)}{1}$ car $\phi \nearrow$ sur $[1;+\infty)$

D'où $\ln n \leq n$ pour $n \geq 1$.

3. D'où $\sum_{2}^{\infty} \ln n\, x^n \underset{\substack{x^n \geq 0 \\ \ln n \geq 0}}{\leq} \sum_{2}^{\infty} n x^n = x \sum_{2}^{\infty} n x^{n-1} = x\left(\sum_{2}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)'$

$= x\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)$

$f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2}(-x^2 + 2x) = \underline{\frac{x^2(2-x)}{(1-x)^2}}$.

4.

Exercice 4 1. $\mathrm{Mat}(f; B, B) = \begin{array}{c|c} & e_1 \;\cdots\; e_n \\ \hline \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \\ \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 2. $\mathrm{Mat}(f; B; B') = \begin{array}{c|c} & e_1 \;\cdots\; e_{n-1} \; e_n \\ \hline \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \\ e_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_n$.