UNIVERSIT LYON I

LICENCE (MATHMATIQUES PURES)

VARIABLE COMPLEXE

EXERCICES et ANNALES

- 2003 -

Table des matières

Chapitre 1

Holomorphie : propriétés élémentaires

1.1 Holomorphie et conditions de Cauchy

Exercice 1.1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. On note $P = \Re\mathrm{e}(\mathrm{f})$ et $Q = \Im\mathrm{m}(\mathrm{f})$ les parties relle et imaginaire de f.*

a) *Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes :*

   (i) f est holomorphe sur U.

   (ii) Pour tout $z_0 \in U$, f est diffrentiable en z_0 et Df_{z_0} est $\mathbb{C}$-linaire.

   (iii) Pour tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, f est diffrentiable en z_0 et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ (par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$).

   (iv) Pour tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, f est diffrentiable en z_0 et f vrifie les quations de Cauchy-Riemann, c'est dire que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\,.$$

b) *Montrer que si f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ alors pour tout $u \in \mathbb{C}$, on a $Df_{z_0}(u) = f'(z_0)u$. En dduire que :*

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \textit{et} \quad Jacf_{z_0} = |f'(z_0)|^2\,.$$

Exercice 1.1.2 *Les applications suivantes sont elles holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$? Si oui, calculer leur drive.*

1. $z \mapsto \overline{z}$.
2. $z \mapsto z\overline{z}$.
3. $z \mapsto \Re\mathrm{e}(\mathrm{z})$.
4. $z \mapsto \Im\mathrm{m}(\mathrm{z})$.
5. $z \mapsto \overline{z}^3$.
6. $z \mapsto z^k$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *fix.*
7. $z \mapsto z^{-k}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *fix.*
8. $z \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ *si* $z = x + iy$.

Exercice 1.1.3

1. *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par* $f(x + iy) = x + 2ixy$. *La fonction* f *est-elle holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *?*
2. *Soit* $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *définie par* $g(x + iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. *La fonction* g *est-elle holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *?*

Exercice 1.1.4 *Soit* f *dfinie sur* $\mathbb{C}$ *par* $f(z) = |z^2|$. *Dterminer l'ensemble des points de* $\mathbb{C}$ *où*

1. f *est diffrentiable.*
2. f *est drivable.*
3. f *est holomorphe.*

Exercice 1.1.5 (Partiel 99) *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *la fonction dfinie par :*

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Dterminer les ensembles des points de $\mathbb{C}$ *o*

a) f *est holomorphe ;*

b) f *est diffrentiable (comme application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*) ;*

c) *f admet des drives partielles et où les quations de Cauchy-Riemann sont satisfaites.*

Exercice 1.1.6 *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction dfinie par :*

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & si\ x+iy \neq 0, \\ 0 & si\ x+iy = 0. \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas diffrentiable en 0, mais possde des drives partielles qui satisfont les quations de Cauchy-Riemann en 0.

Exercice 1.1.7 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note $P = \Re\mathrm{e(f)}$ et $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ les parties relle et imaginaire de f.*

1. *Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes :*
   (a) *f est constante sur U.*
   (b) *P est constante sur U.*
   (c) *Q est constante sur U.*
2. *En dduire que les assertions précédentes sont aussi quivalentes :*
   (d) *$\overline{f}$ holomorphe sur U.*
   (e) *$|f|$ est constante sur U.*

Exercice 1.1.8 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U.*

1. *Montrer que si $f(U) \subset \mathbb{R}$ alors f est constante.*
2. *Que peut-on dire de f si sa partie relle est holomorphe sur U ?*
3. *Mme question si $|f|$ est holomorphe.*

Exercice 1.1.9 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f et g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 1.1.10 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f et g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. On suppose aussi que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 1.1.11 *Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $P = \Re\mathrm{e(f)}$ et $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ les parties relle et imaginaire de f.*

a) *Montrer que s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tel que $aP + bQ = c$ alors f est constante sur U.*

b) *Soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application diffrentiable telle que $\forall z \in f(U)$, on ait $D\Psi_z \neq 0$.*

   i) *Montrer que s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in U$, $\Psi(P(x, y), Q(x, y)) = k$, alors f est constante sur U.*

   ii) *Quelles sont les fonctions holomorphes sur U dont l'image est incluse dans une droite du plan ?; un cercle du plan ?*

Exercice 1.1.12 *Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $P = \Re\mathrm{e(f)}$ et $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ les parties relle et imaginaire de f.*

1. *Caractriser les fonctions $Q_1 : U \to \mathbb{R}$ telles que $P + iQ_1$ est holomorphe sur U.*

2. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphes telles que*

   (a) $P(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$.

   (b) $P(x, y) = x^2 - y^2 - x$.

   (c) $P(x, y) = -ye^x \cos y - xe^x \sin y$.

   (d) $Q(x, y) = x + y$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

1. *Donner une condition nécéssaire et suffisante portant sur a, b, c pour qu'il existe f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que* $\Re\mathrm{e}(\mathrm{f}) = \mathrm{P}$.
2. *Si cette condition est remplie, déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que* $\Re\mathrm{e}(\mathrm{f}) = \mathrm{P}$.

Exercice 1.1.13 (Cauchy-Riemann en polaires) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0 et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction diffrentiable. On note $P = \Re\mathrm{e}(\mathrm{f})$ et $Q = \Im\mathrm{m}(\mathrm{f})$ les parties relle et imaginaire de f. Pour $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, on pose $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$, $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.*

a) *Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes*

(i) *f est drivable en z_0.*

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(z_0) = ir_0 \dfrac{\partial f}{\partial r}(z_0)\,.$

(iii) $\dfrac{\partial P}{\partial r}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)) = \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0))$ *et*
$\dfrac{\partial P}{\partial \theta}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)) = -r_0\dfrac{\partial Q}{\partial r}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0))$

Les quations (ii) et (iii) sont appeles les quations de Cauchy-Riemann en coordonnes polaires.

b) **Application :** *On note U le plan complexe priv de la demi-droite $\{z : \Re\mathrm{e}(z) \leq 0\,, \Im\mathrm{mz} = 0\}$. Pour $z \in U$, on choisit l'argument θ de z dans $]-\pi, \pi[$ et on dfinit $f : U \to \mathbb{C}$ par*

$$f(z) = \sqrt{\rho}e^{i\theta/2}\,.$$

Montrer que f est holomorphe sur U. Calculer $f(z)^2$.

c) *Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ telles $P = \Re\mathrm{e}(\mathrm{f})$ ne dpend pas de θ.*

1.2 Considérations géométriques

Exercice 1.2.1 *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes :*

(i) *dt* $A \geqslant 0$ *et il existe* $k \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $u, v \in \mathbb{C}$ *on a :* $\langle Au, Av \rangle = k^2 \langle u, v \rangle$ *;*

(ii) *il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{R}^+$ *tels que*

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} \; ;$$

(iii) $a = d$ *et* $b = -c$ *;*

(iv) *il existe* $w \in \mathbb{C}$ *tel que pour tout* $u \in \mathbb{C}$ *on a :* $Au = wu$ *;*

(v) *A est la compose d'une rotation de centre 0 et d'angle* θ *et d'une homothtie de rapport* k*.*

(vi) *A est* $\mathbb{C}$*-linaire ;*

(vii) $A(i) = iA(1)$ *;*

Si dt $A \neq 0$*, ces conditions sont encore quivalentes :*

(viii) *A prserve les angles orients (dans ces conditions on dit que A est une similitude directe).*

Rappelons que si z_1*,* z_2 *sont deux lments de* $\mathbb{C}^*$*, on appelle angle orient entre les vecteurs* z_1*,* z_2 *l'unique rel* $\alpha \in [-\pi, \pi[$ *tel que :*

$$\frac{z_2}{|z_2|} = e^{i\alpha} \frac{z_1}{|z_1|} \, .$$

Exercice 1.2.2 *1. Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et soit* $f : U \to \mathbb{C}$ *une application différentiable. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) f *est holomorphe sur* U *et* $f'(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in U$*.*

(b) f *prserve les angles orients entre les courbes et* $f'(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in U$*.*

(c) Pour tout $u \in U$*,* Df_u *est de la forme* $k_u A_u$ *où* $k_u \in]0, +\infty[$ *et* A_u *est une rotation de* $\mathbb{R}^2$*.*

(d) *Pour tout* $u \in U$, $Jacf_u > 0$ *et* Df_u *conserve l'angle orienté de deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$.

N.B : *Une application qui prserve les angles orients entre les courbes qui se coupent en un point* z_0 *est dite* **conforme en** $\mathbf{z_0}$.

2. ***Application 1*** *: soient* $f : z \mapsto e^z$, $a, b \in \mathbb{R}$ *et soit* Δ_1 *(resp.* Δ_2*) la droite d'équation* $x = a$ *(resp.* $y = b$*).*

   (a) *Déterminer* $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$ *et* $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2)$.

   (b) *Que signifie géométriquement le résultat précédent ?*

3. ***Application 2*** *: soit* $f : z \mapsto \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

   (a) *Déterminer l'ensemble des* $z \in \mathbb{C}$ *où* f *est conforme.*

   (b) *Soient* $\gamma_1 = \{z : |z| = 1\}$, $\gamma_2 = \{z : \arg(z) = \frac{\pi}{2}\}$, $\gamma_3 = \{z : \arg(z) = -\frac{\pi}{2}\}$. *Déterminer* $f(\gamma_i)$ *pour* $1 \leq i \leq 3$ *et en donner une représentation graphique.*

   (c) *Examiner les angles entre les courbes* γ_1 *et* γ_2*, puis entre les courbes* γ_1 *et* γ_3*. Conclure.*

Exercice 1.2.3 *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z) := z^2$.

a) *Montrer que* f *est une application conforme sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) *L'application* f *est-elle conforme en* $z_0 = 0$ *?*

Exercice 1.2.4 *Soient* $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ *deux vecteurs tangents à* $\mathbb{S}$ *en un point* M *de* $\mathbb{S}$. *L'angle orienté* $\widehat{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}$ *entre* $\vec{e_1}$ *et* $\vec{e_2}$ *est l'unique réel* $\alpha \in [-\pi, \pi[$ *tel que*

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle}{\|\vec{e_1}\| \|\vec{e_2}\|} \text{ et } \sin\alpha = \frac{\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}}{\|\vec{e_1}\| \|\vec{e_2}\|} \cdot \overrightarrow{M0} \,.$$

Montrer alors que si γ_1 *et* γ_2 *sont deux chemins de* $\mathbb{C}$ *qui se coupent en* z_0*, alors*

$$\widehat{(\gamma_1, \gamma_2)} = (\pi \circ \widehat{\gamma_1, \pi \circ} \gamma_2),$$

øù π *est la projection stéréographique de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{S} \setminus \{N\}$.

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Disque de convergence et comportement au bord.

Exercice 2.1.1 *Calculer le rayon de convergence des sries suivantes :*

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n \quad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 0} n! z^n \quad \text{c)} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$
$$\text{d)} \quad \sum_{n\geqslant 0} n! z^{n^2} \quad \text{e)} \quad \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!}.$$

Montrer que la srie c) *converge pour tout* z *tel que* $z \neq \frac{1}{4}$ *et* $|z| = \frac{1}{4}$.

Exercice 2.1.2 *Soit* $\theta \in]0, 2\pi[$, $\theta \neq \pi$.

a) *Montrer que si* $|z| < 1$, *la srie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$ *converge absolument.*

b) *Montrer que, pour* $z = e^{i\theta}$ *ou* $z = e^{-i\theta}$, *la srie du a) diverge. En dduire le rayon de convergence de cette srie.*

c) *Montrer, sur cet exemple, qu'une srie entire et sa srie drive n'ont pas le mme comportement sur le bord du disque de convergence.*

Exercice 2.1.3 *Calculer le rayon de convergence des sries suivantes et tudier la convergence de la srie sur le bord du disque de convergence :*

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n}} \quad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^2} \quad \text{c)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{i\pi n^2/2}}{n} z^n.$$

Exercice 2.1.4 *La convergence absolue d'une srie entire en un point du cercle de convergence implique-t-elle la convergence absolue en tout point de ce cercle ?*

Exercice 2.1.5

a) *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une srie entire de rayon de convergence* $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$. *Montrer que si la srie numrique*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$$

converge alors la srie de fonctions

$$z \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

converge uniformment sur le segment $[0, z_0]$ *du plan complexe.*

b) **Application :** *on veut montrer que*

$$\log 2 = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{2.1}$$

(*i*) *Montrer que la srie entire*

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

a pour rayon de convergence 1 et que pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\log(1+t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

(*ii*) *En utilisant* a), *en dduire la formule (2.1).*

2.2 Dveloppement en srie entire

Exercice 2.2.1 *Dvelopper en srie entire au voisinage de 0 les fonctions suivantes (on prcisera le rayon de convergence) :*

a) $g(z) = \dfrac{2}{(1+z)^3}$.

b) $h(z) = e^{\frac{z}{\tan(\alpha)}} \cos(z)$, *o* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *est fix et* $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

Rciproquement, on considre la srie entire $S(z) := \sum_{n\geqslant 1} nz^n$. *Calculer le rayon de convergence de cette srie entire et expliciter* $S(z)$.

Exercice 2.2.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dfinie par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0\,. \end{cases}$$

a) *Montrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

b) *Montrer que* f *n'est pas dveloppable en srie entire au voisinage de 0 et n'est donc pas analytique en 0.*

Exercice 2.2.3 *On considre l'quation diffrentielle :*

$$(E) \qquad\qquad z(z-1)\varphi''(z) + 3z\varphi'(z) + \varphi(z) = 0.$$

Montrer que (E) *possde une unique solution* φ *holomorphe dans* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, *telle que* $\varphi'(0) = 1$.

2.3 Thorme de Liouville et formule de Parseval

Exercice 2.3.1 *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une srie entire de rayon de convergence* $R > 0$. *Pour* $|z| < R$, *on pose*

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

a) *On fixe* $r \in]0, R[$. *Montrer que, pour tout* $n \geqslant 0$, *on a :*

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

b) *Pour* $r \in]0, R[$, *on pose* $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$. *Justifier que* $M(r) < +\infty$ *et que, pour tout* $n \geqslant 0$, *on a*

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

c) *On suppose que* $R = +\infty$. *Montrer que s'il existe deux constantes* $A, B \in \mathbb{R}^+$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant A + B|z|^k,$$

alors f *est un polynme de degr infrieur ou gal* k. *Expliciter le cas o* $k = 0$.

d) *On revient au cas gnral. Etablir la formule suivante (dite* **formule de Parseval***) :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}, \quad (r \in [0, R[).$$

e) *On suppose que* f *se prolonge en une fonction continue* $\widetilde{f}$ *sur le disque ferm* $D(0, R]$.

e.i) *Soit* $\varphi : [0, R] \to \mathbb{R}$ *dfinie par*

$$\varphi(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widetilde{f}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

Montrer que φ *est continue sur* $[0, R]$.

e.ii) *En dduire que la formule de Parseval reste valable en remplaant* f *par* $\widetilde{f}$ *et* r *par* R.

Chapitre 3

Homographie et fonctions classiques

3.1 Les homographies

Exercice 3.1.1 *Soit* $\varphi : z \longmapsto \frac{1}{z}$*. Déterminer "à la main"* $\varphi(\gamma)$ *où :*

1. γ *est le cercle de centre* i *et de rayon* 1.
2. γ *est la droite d'équation* $2x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 3.1.2 *Soient* $f : z \longmapsto \frac{2z+i}{z-1}$, Δ *l'axe réel,* Δ' *l'axe imaginaire,* γ_0 *le cercle unité et* D *le domaine suivant :*

1. *Déterminer* $f(\Delta)$, $f(\Delta')$ *et* $f(\gamma_0)$.
2. *En déduire* $f(D)$.

Exercice 3.1.3 *Soit* $D_0 = D(0, 1[$ *et* $f : z \longmapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ *où* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $a \in D_0$. *Montrer que* $f(D_0) = D_0$.

Exercice 3.1.4 *Soit* $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m(z)} > 0\}$ *et* $f : z \longmapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ *où* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $a \in \pi^+$. *Montrer que* $f(\pi^+) = D_0$.

Exercice 3.1.5 1. *Dterminer l'image de l'axe rel par l'homographie* $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$.

2. *En dduire l'image par* f *du demi-plan* $\{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}z < 0\}$.
3. *Dterminer l'image de la bande* $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im\mathrm{m}z < \pi\}$ *par* $g(z) = -e^z$.
4. *Dduire des questions prcdentes une transformation conforme transformant la bande* B *en le disque unit* $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

3.2 Les fonctions circulaires et hyperboliques

Exercice 3.2.1 a) *Montrer que* $\forall z \in \mathbb{C}$, *on a* $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$; $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$; $\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$ *et* $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$. *Dduire les parties relles et imaginaires des fonctions* cos, sin, ch *et* sh. *Les fonctions* cos *et* sin *sont-elles bornes sur* $\mathbb{C}$ *?*

b) *Trouver les zros des quatre fonctions* cos, sin, ch *et* sh.

c) *Donner le développement en série entière des quatre fonctions* cos, sin, ch *et* sh.

d) *Rsoudre les quations :*

(i) $\sin(z) = \dfrac{5}{3}$.

(ii) $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{1}{2}$.

(iii) $\cos(z) = 2$.

(iv) $\sin z = \mathrm{ch}\,4$.

Exercice 3.2.2 *Soit* $f : z \longmapsto \sin(z)$ *et* $g : z \longmapsto \cos(z)$.

1. *Trouver l'image par* f *de la droite d'équation* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2. *Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = a$ o $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.*
3. *Trouver l'image par f du segment $\{-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}; y = 0\}$.*
4. *Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi; y = a\}$ avec $a > 0$.*

Exercice 3.2.3 a) *Quels sont les domaines de dfinition de* $\tan$ *et de* th *? Montrer que* $\tan$ *est π-priodique et que* th *est $i\pi$-priodique.*

b) *Montrer que* $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ *et que* $1 + \tan^2(z) = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$ *pour* $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

c) *Montrer que* $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$ *et que* $1 - \mathrm{th}^2(z) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(z)}$ *pour* $z \neq i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

d) *Rsoudre :*

(i) $\exp(z) = 1$.

(ii) $\exp(z) = i$.

(iii) $\exp(z) = -3$.

3.3 Le logarithme complexe

Exercice 3.3.1 *Soit* $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *et* Log *la détermination principale du logarithme.*

1. *A t-on* $\mathrm{Log}(e^z) = z$ *pour tout* $z \in (\exp)^{-1}(U)$ *? Sinon, déterminer un ouvert V de $\mathbb{C}$ où cette égalité est vraie.*
2. *Soit* $P^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e(z)} > 0\}$. *A t-on* $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}z + \mathrm{Log}z'$ *pour tous* $z, z' \in P^+$ *?*
3. *Même question en remplaçant* P^+ *par* $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m(z)} > 0\}$.

Exercice 3.3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. On appelle détermination holomorphe sur U du logarithme de f toute application F holo-*

morphe sur U telle que

$$e^{F(z)} = f(z) \textit{ pour tout } z \in U.$$

1. *On suppose qu'une telle fonction F existe. Calculer $F'(z)$ pour $z \in U$.*
2. *On suppose qu'une telle fonction F existe et on suppose aussi que U est connexe. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U du logarithme de f.*
3. *Dans son disque de convergence, calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$.*

Exercice 3.3.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle dtermination holomorphe sur U de la fonction arctangente toute fonction holomorphe f sur U, valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$, $(z \in U)$.*

1. *Montrer que s'il existe une dtermination holomorphe sur U de la fonction arctangente, alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.*
2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes :*

   (i) *f est une dtermination holomorphe de la fonction arctangente sur U,*

   (ii) *$2if(z)$ est une dtermination holomorphe sur U du logarithme de $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.*
3. *Soit U un ouvert* **connexe** *de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Supposons qu'il existe sur U une dtermination holomorphe de la fonction arctangente. Expliciter toutes les dterminations holomorphes sur U de la fonction arctangente*
4. *Soit $U := \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geqslant 1\}$.*

   a) *Construire sur U une dtermination holomorphe f de la fonction arctangente.*

   b) *Dterminer $f(U)$.*

   c) *Donner pour $|z| < 1$, le dveloppement en srie entire de f.*

Exercice 3.3.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle dtermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe f sur U, valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que* $\sin(f(z)) = z$, $(z \in U)$.

1. *Montrer que s'il existe une dtermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus, alors $-1 \notin U$ et $1 \notin U$.*
2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni 1, ni -1. Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes :*
   - (i) *f est une dtermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus,*
   - (ii) *il existe g holomorphe sur U tel que $g(z)^2 = 1 - z^2$ et $e^{if(z)} = iz + g(z)$ pour tout $z \in U$.*
3. *Montrer que dans ce cas $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$ pour tout $z \in U$.*
4. *Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$. Montrer qu'il existe sur U une unique dtermination holomorphe f de la fonction arcsinus telle que $f(0) = 0$.*

3.4 Les fonctions puissances non entières

Exercice 3.4.1 (Racines carres d'une fonction holomorphe) *Notons U le plan complexe priv des deux demi-droites $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ de l'axe rel.*

a) *Montrer que l'image de U par la fonction $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 - 1$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.*

b) *On note* Log *la dtermination du logarithme dfinie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)} \end{array}$$

est bien dfinie et holomorphe sur U. Calculer son carr et sa drive.

c) *Notons V le plan complexe priv du segment $[-1, 1]$. Vrifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. Ceci permet de dfinir :*

$$\begin{array}{rccl} g: & V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & izf(z^{-1}) = iz\, e^{\frac{1}{2}\log(z^{-2}-1)}. \end{array}$$

Montrer que g est bien dfinie et holomorphe sur V. Calculer son carr et sa drive.

Exercice 3.4.2 (Racines p-imes) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et p un entier, $p \geq 2$.*

On appelle dtermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on a : $f(z)^p = z$.

a) *Montrer que s'il existe une dtermination holomorphe de $z \mapsto \log(z)$ sur U, alors il existe une dtermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.*

b) *Soit f une dtermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En dduire que $0 \notin U$.*

c) *On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux dterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.*

d) *En dduire que s'il existe une dtermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U, alors il en existe exactement p disctinctes. Quelles sont-elles ?*

e) *Montrer qu'il existe une unique dtermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que $f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.*

f) *Montrer qu'il existe une unique dtermination holomorphe g de $z \mapsto z^{1/2}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ telle que $g(-1) = i$. Déterminer $g(U)$.*

Exercice 3.4.3 *Soient $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_j = \arg(a_j) \in [-\pi, \pi[$, $L_j = \{re^{i\alpha_j} : r \geq |a_j|\}$ et $U = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^m L_j$.*

1. *Montrer qu'il existe f holomorphe sur U telle que $f(z)^2 = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$ pour tout $z \in U$.*

2. *Soit $U = \mathbb{C} \setminus (]-\infty - 1] \cup [1, +\infty[)$. En utilisant la question 1., retrouver le rsultat de l'exercice 3.4.1, savoir qu'il existe sur U une détermination holomorphe de $(z^2 - 1)^{1/2}$.*

3. *Même question en remplaçant U par $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.*

Chapitre 4

Intégrales curvilignes

4.1 Calculs explicites et majoration

Exercice 4.1.1 *Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer*

$$\int_\gamma \overline{z}dz.$$

Exercice 4.1.2 *Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1 + i$, $1 - i$, $-1 - i$ et $-1 + i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer*

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z}dz.$$

N.B. : *cet exercice sera repris dans le chapitre suivant.*

Exercice 4.1.3 *Soit γ le cercle unité, et soit f une fonction continue définie sur le support de γ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que*

$$\overline{\int_\gamma f(z)dz} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2}dz.$$

Exercice 4.1.4 *Soient $P = \{z : \Im\mathrm{m}(z) \geq 0\}$ et f continue sur P et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :*

$$|f(z)| \leq M|z|^n \text{ pour tout } z \in P.$$

Soit γ_R le demi-cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans P. Montrer que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz\right| \leq M\pi R^n.$$

4.2 Les lemmes de Jordan

Exercice 4.2.1 *On fixe* $r_0 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ *avec* $\alpha_1 < \alpha_2$.

1. *Soit* $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. *Soit* $f : \Delta_1 \to \mathbb{C}$ *continue telle que* $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *et soit* $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{C}$ *défini par* $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. *Montrer que*
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$
2. *Soit* $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leqslant r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. *Soit* $g : \Delta_2 \to \mathbb{C}$ *continue telle que* $\lim_{z\to 0} zg(z) = 0$ *et soit* $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{C}$ *défini par* $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. *Montrer que*
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} g(z)dz = 0.$$

4.3 Application

Exercice 4.3.1 *En intégrant* $z \longmapsto e^z$ *le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ *et pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re\mathrm{e}(z) \geq 0$ *on a :*
$$\left|e^{bz} - e^{az}\right| \leq (b-a)|z|e^{b\Re\mathrm{e}(z)}.$$

Chapitre 5

Primitives de fonctions holomorphes et indices

5.1 Primitives

Exercice 5.1.1 *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que les assertions suivantes sont quivalentes :*

1. *$\frac{f'}{f}$ a une primitive dans U.*
2. *Il existe dans U une détermination holomorphe du logarithme de f.*

Dans ce cas, quelles sont toutes les déterminations holomorphes sur U du logarithme de f ?
N.B. : *ce résultat a été énoncé en cours mais non démontré. On pourra désormais l'utiliser.*

Exercice 5.1.2 *Soit $U = D(0,1[\setminus\{0\}$. Montrer que dans U il n'existe aucune détermination holomorphe du logarithme.*

Exercice 5.1.3 *Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z}dz$ (sans expliciter l'intégrale curviligne et sans la théorie de l'indice).*

Exercice 5.1.4 *On fixe $a \in]0,1[$ et $r \in]0,1-a[$. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$, on définit g par $g(z) = 2\frac{z-a}{z^2-1}$. Soit $\Gamma = g \circ \gamma$.*

1. *Montrer que* Γ *est un circuit tracé dans* $\mathbb{C}^*$.
2. *Calculer* $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$.

Exercice 5.1.5 *Soit* γ *le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1. *Calculer :*

1. $\int_\gamma e^z dz$.
2. *Pour* $n \geq 1$, $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$.
3. $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz$.
4. $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz$.
5. $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} dz$.

Exercice 5.1.6

1. *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{i^n z^{n-1}}{n!}$. *Montrer que* f *est entière et calculer* $f(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
2. *Soit* $r > 0$. *En utilisant le circuit* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *défini par*
$$\gamma(t) = \begin{cases} re^{2i\pi t}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t-3)r, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$
montrer que :
$$\int_{-r}^{r} f(x)dx - i\pi = -i \int_0^\pi \exp(ire^{ix})dx.$$
3. *En déduire la valeur de l'intégrale généralisée*
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

5.2 Indices

Exercice 5.2.1 *Calculer de deux manières différentes* $\int_\gamma \frac{z-1}{z} dz$ *où* γ *est le circuit dont le support est le carré de sommets* $1+i$, $1-i$, $-1-i$ *et* $-1+i$ *parcouru une fois dans le sens direct.*

Exercice 5.2.2 *Soit* γ *l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *avec* $a, b > 0$. *En calculant de deux manières différentes* $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, *donner la valeur de*
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Exercice 5.2.3 *1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$. Montrer que l'application $t \longmapsto \frac{1}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.*

2. *Pour $|\alpha| \neq 1$, soit $f(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$. En considérant l'intégrale curviligne d'une fonction bien choisie le long du cercle unité, calculer $f(\alpha)$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1\}$?*

Exercice 5.2.4 *Soit $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. On a vu que (cf. TD du chapitre 3) qu'il existe sur V une détermination holomorphe de $(z^2 - 1)^{1/2}$. Montrer que néanmoins, il n'existe pas de de détermination holomorphe de $\log(z^2 - 1)$.*

Exercice 5.2.5 *Soit U un domaine et f une fonction holomorphe sur U telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

1. *Montrer que pour tout circuit γ tracé dans U on a :*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in \mathbb{Z}.$$
2. *En déduire que si pour tout $n \geq 2$, il existe sur U une détermination holomorphe de $(f(z))^{1/n}$, alors il existe sur U une détermination holomorphe de $\log f$.*

Exercice 5.2.6 *Soit $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$.*

1. *Soit γ un circuit tracé dans U. Montrer que*
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$
2. *Montrer qu'il existe une unique fonction f holomorphe sur U telle que $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z \in U$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.*
3. *Existe-t-il une primitive de $z \longmapsto \frac{1}{z^2+1}$ dans $D(0, 1[$? dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?*

Exercice 5.2.7 *Soit $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une application continue, non borne, prenant la valeur 0 en 0. Notons $U = \mathbb{C} \setminus \delta(\mathbb{R}^+)$, et soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un circuit trac dans U. Notons $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, \delta(t))$ (voir figure 4).*

FIG. 5.1 – Coupure pour une dtermination du logarithme

a) *Montrer que φ est continue.*

b) *En dduire que φ est constante. Que vaut-elle ?*

c) *Conclure : pour tout circuit γ trac dans U, on a* $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

d) *En dduire qu'il existe une dtermination holomorphe du logarithme dans U.*

Chapitre 6

Théorème de Goursat et formules de Cauchy

6.1 Thorme de Goursat

Exercice 6.1.1 *Donner l'exemple d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ et d'une fonction f holomorphe sur U admettant des primitives au voisinage de chaque point de U mais n'admettant pas de primitive sur U.*

Exercice 6.1.2 *Soient Ω un ouvert toil et f une fonction holomorphe sur Ω. Donner une condition ncessaire et suffisante simple pour qu'il existe sur Ω une dtermination holomorphe du logarithme de f. Dans ce cas, expliciter l'ensemble*

$$H := \{h \text{ holomorphe sur } \Omega : e^{h(z)} = f(z),\, z \in \Omega\}.$$

Exercice 6.1.3 *Soient Ω un ouvert toil et f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que $f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, il existe une dtermination holomorphe sur Ω de la racine $n-$ime de f.*

Exercice 6.1.4 a) *Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\, |y| \geqslant 1\}$.*

(*i*) *Montrer qu'il existe une unique fonction f holomorphe sur U vrifiant*

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2},\ (z \in U) \quad et \quad f(0) = 0.$$

(*ii*) *Justifier que f est analytique en 0 et donner son dveloppement en srie de Taylor.*

b) *L'application $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$ est-elle primitivable sur $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$?*

c) *Mme question sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?*

6.2 Formules de Cauchy

Exercice 6.2.1 *On a vu en TD (voir exercice 2.3.1) que si $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est la somme d'une srie entire de rayon de convergence R, alors, pour tout $r \in [0, R[$, on a*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta.$$

Retrouver cette formule par une autre mthode.

Exercice 6.2.2 *Calculer pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $R > 0$, $R \neq |a|$, l'intgrale*

$$I = \int_{\gamma_R} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3} \, dz \,,$$

o γ_R est le cercle de centre 0 et de rayon R.

Exercice 6.2.3 *Calculer les intgrales curvilignes suivantes, o γ dsigne le cercle unit parcouru une fois dans le sens direct :*

$$\text{a)} \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z} \, dz \,, \qquad \text{b)} \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z} \, dz \,, \qquad \text{c)} \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} \, dz \,.$$

Exercice 6.2.4 *Soit f une fonction entire telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :*

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|} \,.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 6.2.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unit ferm $\overline{D} = D(0, 1]$. On note γ le cercle unit parcouru une fois dans le sens positif.*

a) *Montrer qu'il existe $r > 1$ tel que $\mathrm{Supp}\gamma \subset D(0, r[\subset U$.*

b) *Soit f holomorphe sur U.*

(i) *En calculant de deux manires diffrentes l'intgrale curviligne suivante*

$$I := \int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz,$$

donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

(ii) *On fixe $a \in \mathbb{C}^*$, $|a| \neq 1$. Calculer*

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\, dz.$$

Exercice 6.2.6 *Soient $R > 0$, f une fonction holomorphe sur $D(0, R[$ et continue sur $D(0, R]$. On note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que, pour tout $z \in D(0, R[$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(u)}{u-z}\, du\,.$$

Exercice 6.2.7 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur U telles que*

(i) *la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur U vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$;*

(ii) *il existe $M > 0$ telle que $|f_n(z)| \leqslant M$, $\forall n \geqslant 0$, $\forall z \in U$.*

a) *Soit $z_0 \in U$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R[\subset U$. Montrer que, $\forall a \in D(z_0, R[$,*

$$f(a) = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,,$$

o γ_r est le cercle de centre z_0 et de rayon $r \in]|z_0 - a|, R[$. En dduire que f est continue en a.

b) *Montrer que, $\forall a \in D(z_0, R[$,*

$$f(a) = \sum_{n\geqslant 0} (a - z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,,$$

et en dduire que f est holomorphe sur U.

Exercice 6.2.8 *Soit $R \geqslant 1$ et $f : D(0,R[\to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D(0,R[$. On suppose que, pour tout $z \in D(0,1[$, on a*

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|}\,.$$

Montrer que $\forall n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\,.$$

Exercice 6.2.9 *Soit f holomorphe sur $D(0,R[$ et continue sur $D(0,R]$. On note $M := \sup\limits_{|z|=R} |f(z)|$.*

a) *Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\forall z \in D(0,R[$, on a :*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du\,.$$

b) *En dduire que*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqslant \frac{MR}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2+|z|^2-2R|z|\cos\varphi)^{\frac{n+1}{2}}}\,.$$

c) *En dduire enfin que :*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{MR}{R^2-|z|^2}\,, \quad \forall z \in D(0,R[\,.$$

Exercice 6.2.10 *Soit $f : D(0,1[\to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $r \in]0,1[$. On suppose qu'il existe $z_0 \in D(0,r[$ tel que $f(z_0) = 0$. En crivant la formule de Cauchy pour 0 et z_0 montrer que*

$$|z_0| \geqslant \frac{r|f(0)|}{M+|f(0)|}\,,$$

o $M := \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

6.3 Analyticit des fonctions holomorphes

Exercice 6.3.1

a) *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une srie entire de rayon de convergence* $R > 0$*. On pose*

$$F(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n \,.$$

Montrer que F *est entire et que* $\forall \rho > 0$, $\rho < R$, *il existe* $M(\rho) \geqslant 0$ *telle que*

$$|F(z)| \leqslant M(\rho) \exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right) \,, \quad \forall z \in \mathbb{C} \,.$$

b) *Rciproquement, soit* F *une fonction entire et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *sa srie de Taylor l'origine. On suppose qu'il existe deux constantes* $a > 0$, $B > 0$ *telles que*

$$|F(z)| \leqslant B e^{a|z|}, \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Montrer que $f : z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} n! b_n z^n$ *est une fonction holomorphe sur* $D(0, \frac{1}{a}[$.

Exercice 6.3.2 *On fixe* $\omega \in \mathbb{C}^*$ *et on considre* $g : z \longmapsto g(z) = \dfrac{1}{1 - 2\omega z + z^2}$.

a) *Montrer qu'il existe un voisinage* V *de* 0 *et une fonction* f *holomorphe sur* V *telle que*

$$f(z)^2 = g(z), \ \forall z \in V \quad et \quad f(0) = 1.$$

b) *Montrer qu'il existe un disque ouvert* D *centr en* 0 *et* $(P_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de polynmes,* P_n *de degr* n*, telle que*

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n\geqslant 0} P_n(\omega) z^n.$$

Exercice 6.3.3 *Soit* Ω *un ouvert toil et* γ *un circuit trac dans* Ω*. On considre* f *une fonction holomorphe sur* Ω *et* P *un polynme de degr* $m \geqslant 1$ *dont les racines appartiennent* $\Omega \setminus \mathrm{Supp}\gamma$*. Pour* $z \notin \mathrm{Supp}\gamma$*, on pose*

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z)P(u)}\, du$$

et

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \left(1 - \frac{P(u)}{P(z)}\right) du.$$

a) *Justifier que* g *et* R *sont des fonctions holomorphes sur* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}\gamma$.

b) *Montrer que* R *est la restriction* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}\gamma$ *d'un polynme, de degr infrieur ou gal* $m-1$, *que l'on notera aussi* R.

c) *Montrer que, pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}\gamma$, *on a*

$$P(z)g(z) + R(z) = f(z)\mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

Exercice 6.3.4 *Soit* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *dfinie par*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & si\ z \neq 0 \\ 1 & si\ z = 0. \end{cases}$$

a) *Montrer que* f *est analytique en* 0. *Soit* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *la srie de Taylor de* f *l'origine. Dterminer le rayon de convergence* R *de cette srie entire.*

b) *Montrer qu'il existe une constante* $M > 0$ *telle que, pour tout* $n \geqslant 0$, *on ait*

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{2^n}.$$

Chapitre 7

Zéros des fonctions holomorphes, prolongement analytique et principe du maximum

7.1 Zéros d'une fonction holomorphe

Exercice 7.1.1 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.*

1. *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que f ou g est identiquement nulle.*

2. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'il existe deux déterminations holomorphes de la racine carrée de f, notées g_1 et g_2. Retrouver le fait que $g_1 = g_2$ ou $g_1 = -g_2$.*

Exercice 7.1.2 *Etudier l'existence et l'unicit de fonctions holomorphes f sur un voisinage connexe U de 0 telles que :*
a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n \geqslant 1.$ b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \exp(-n)$, $\forall n \geqslant 1.$

Exercice 7.1.3 *Dterminer les zros de la fonction $z \longmapsto 1 - \exp\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$ dans le disque ouvert $D(0,1[$. Cela contredit-il le principe des zros isols ?*

Exercice 7.1.4 *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'lments de U qui converge vers $a \in U$ sans jamais prendre cette valeur. Soient f et g deux* *fonctions holomorphes sur U telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)\,.$$

Montrer que si $g(a) \neq 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f = cg$.

Exercice 7.1.5 *Soient f et g deux fonctions entires telles que :*

$$|f(z)| \leqslant |g(z)|\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

a) *Montrer que tout zro z_0 de g est un zro de f et que la multiplicité de f au point z_0 est au moins aussi grande que celle de g.*

b) *En dduire que f et g sont proportionnelles.*

Exercice 7.1.6 *On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note*

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U telle que :

$$f(az) = f(z), \quad \forall z \in U\,.$$

Enfin on dfinit $g : U \to \mathbb{C}$ par $g(z) = zf'(z) - f'(1)$, $z \in U$.

a) *Calculer $g(a^n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

b) *Montrer que g est identiquement nulle sur U.*

c) *Montrer que f est constante.*

d) *La conclusion subsiste-t-elle si on prend $t \in \mathbb{Q}$?*

7.2 Principe du prolongement analytique

Exercice 7.2.1 *Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy \,:\, y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$. Montrer qu'il existe f holomorphe sur U telle que, pour tout $z \in U$, on ait :*

$$z\cos(f(z)) - \sin(f(z)) = 0.$$

Indication : Considérer la fonction arctan *définie sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7.2.2 *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, symtrique par rapport l'axe réel (i.e. $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$) et f une fonction holomorphe sur U.*

a) *Montrer que la fonction $f^* : U \to \mathbb{C}$ dfinie par $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in U$, est holomorphe sur U.*

b) *Montrer que $I = U \cap \mathbb{R}$ est non vide et mme contient un segment non rduit un point.*

c) *Montrer qu'il existe deux fonctions g et h holomorphes sur U, valeurs relles sur I et telles que $f = g + ih$. Y a-t-il unicit du couple (g, h) ?*

d) *Montrer que pour tout $z \in U$, on a $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$ et $\overline{h(\overline{z})} = h(z)$. Calculer $\overline{f(\overline{z})}$.*

Exercice 7.2.3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction analytique.*

1. *Montrer que $\forall x \in]a, b[$ il existe $r_x > 0$ et g_x une fonction holomorphe sur $D(x, r_x[$ telle que $g_{x|]x-r_x, x+r_x[} \equiv f$.*
2. *En déduire qu'il existe Ω un domaine de $\mathbb{C}$ contenant $]a, b[$ et une unique fonction g holomorphe sur Ω telle que $g_{|]a,b[} \equiv f$.*

Exercice 7.2.4 a) *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $L := \{z_0 + tb : t \in \mathbb{R}\}$ o $b \in \mathbb{C}^*$. Soit f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus L$. Montrer que f est holomorphe sur Ω.*

b) *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$, continue et borne sur $\overline{\mathbb{H}_+}$ et ne prenant que des valeurs relles sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante (On pourra chercher prolonger f sur $\mathbb{C}$).*

Exercice 7.2.5 *Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert de centre 0 et de rayon $r > 1$ et ne prenant que des valeurs relles sur le cercle unit. Que peut-on dire de f ?*

Exercice 7.2.6 a) *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ dont l'adhrence est compacte et g une fonction holomorphe sur U, continue sur $\overline{U}$. Montrer que* *si $|g|$ est constante sur la frontire de U alors g a un zro dans U ou g est constante. Que peut-on dire si U n'est pas connexe ?*

b) *Soit f une fonction entire qui envoie le cercle unit $\mathbb{T}$ dans lui mme (i.e. $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$). On veut montrer que $f(z) = cz^n$, pour $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ convenables.*

   (i) *Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zros dans le disque unit $\mathbb{D}$. On les note $a_1, \ldots, a_N$ tous pris avec leur ordre de multiplicit.*

   (ii) *On pose, pour $z \in \mathbb{C}$*

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - \overline{a_i} z}{z - a_i}.$$

   En utilisant a), *montrer que g est constante.*

   (iii) *En utilisant le fait que f est une fonction entire, montrer que, pour tout $i = 1 \ldots, N$, on a $a_i = 0$.*

   (iv) *Conclure.*

7.3 Principe du maximum

Exercice 7.3.1 (Lemme de Schwarz) *Soit $D = D(0,1[$ et soit f holomorphe sur D. On suppose que*

$$f(0) = 0 \text{ et } f(D) \subset D.$$

1. *En considérant $g : z \longmapsto \frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.*
2. *On suppose de plus qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ (resp. $|f'(0)| = 1$). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.*

Exercice 7.3.2 (Application du lemme de Schwarz) *Soient $D = D(0,1[$ et g holomorphe sur D. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|g(z)| < M$ pour tout $z \in D$.*

1. *On pose* $f(z) = \frac{g(z)}{M}$ *et* $\varphi(z) = \frac{z-f(0)}{1-\overline{f(0)}z}$.
   (a) *Montrer que* φ *est holomorphe sur* D *et que* $\varphi(D) \subset D$.

   (b) *En déduire que, pour tout* $z \in D$:

   $$\frac{|g(z) - g(0)|}{M^2 - \overline{g(0)}g(z)} \leq \frac{|z|}{M}.$$

2. *On suppose de plus que* $|g'(0)| = M$. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = M$ *tel que* $g(z) = \lambda z$ *pour tout* $z \in D$.

Exercice 7.3.3 *Soit* $R > 0$ *et* f *une fonction holomorphe sur le disque ouvert* $D(0, R)$. *Pour* $r \in [0, R[$, *on pose :*

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|\,.$$

a) *Montrer que* M *est une fonction croissante.*

b) *Montrer que s'il existe* $r_1 \neq r_2$ *tels que* $M(r_1) = M(r_2)$, *alors* f *est constante sur* $D(0, R)$.

c) *Soit* P *un polynme de degr* $n \geqslant 1$. *Pour* $r > 0$, *on pose* $s(r) = \dfrac{M(r)}{r^n}$.

   (i) *Montrer que* s *est dcroissante et que si* P *n'est pas de la forme* $a_n z^n$, *alors* s *est strictement dcroissante. (Pour comparer* $s(r_1)$ *et* $s(r_2)$, *on pourra considrer* $f(z) = z^n P\left(\dfrac{r_1 r_2}{z}\right)$.*)*

   (ii) *Montrer que, pour tout* $r > 0$, *on a* $|a_n| \leqslant s(r)$, *puis que* $\lim\limits_{r\to+\infty} s(r) = |a_n|$. *Redmontrer le rsultat du (i), en considrant la fonction* $f(z) = \dfrac{P(z)}{z^n}$.

   (iii) *En dduire que si* P *n'est pas de la forme* $a_n z^n$, *alors il existe* z *de module 1 tel que* $|P(z)| > |a_n|$.

   (iv) *Montrer que si* P *est major par 1 sur le disque unit, alors* $|P(z)|$ *est major par* $|z|^n$ *hors du disque unit.*

Exercice 7.3.4 *Soit* $0 < r < R$ *et* $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe tel que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0, r)}$.

a) *Montrer qu'il existe* $\rho \in]r, R[$ *tel que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0,\rho)}$.

b) *En dduire que*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it}|\, dt\,.$$

(On montrera qu'il existe une dtermination holomorphe de $\log f$ *sur* $D(0,\rho)$*).*

Exercice 7.3.5 *Soit* $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe telle que* $f(0) = 0$ *et* $|f(z)| \leqslant C$, $\forall z \in D(0,R)$.

a) *Montrer que* $|f'(0)| \leqslant \dfrac{C}{R}$.

b) *Montrer que* $|f'(0)| = \dfrac{C}{R}$ *si et seulement s'il existe* λ, $|\lambda| = 1$, *tel que* $f(z) = \dfrac{C\lambda}{R} z$, $\forall z \in D(0,R)$.

Exercice 7.3.6 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Soient* z_0 *un point de* U *et* f *une fonction holomorphe de* $U \setminus \{z_0\}$ *dans* $\mathbb{C}$. *On suppose que* f *est borne au voisinage de* z_0. *Montrer alors que* f *se prolonge par continuit en une fonction holomorphe de* U *dans* $\mathbb{C}$.

Exercice 7.3.7 *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* z_0 *un point de* U. *Soit* f *une fonction holomorphe de* U *dans* $\mathbb{C}$ *qui n'est pas constante au voisinage de* z_0. *Montrer qu'il existe une fonction* φ *dfinie sur un voisinage de* z_0 *et dont la drive ne s'annule pas en* z_0 *et un entier* $p > 0$ *tel que l'on ait, pour tout* z *voisin de* z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^p\,.$$

Exercice 7.3.8 *En utilisant l'exercice 7.3.7, montrer qu'une fonction holomorphe sur un ouvert* U, *qui n'est constante sur aucune composante connexe de* U, *est ouverte (i.e. qu'elle envoie tout ouvert de* U *sur un ouvert de* $\mathbb{C}$*).*

Exercice 7.3.9 *Soit* $\mathbb{D}$ *le disque unit ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* z_0 *un point de* $\mathbb{D}$. *Soit* f *une fonction holomorphe de* $\mathbb{D}$ *dans* $\mathbb{D}$. *Pour tout* $z \neq z_0$ *de* $\mathbb{D}$, *on pose :*

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)}\,\frac{1 - \overline{z_0}z}{z - z_0}\,.$$

a) *Montrer que φ se prolonge en une fonction holomorphe dfinie sur $\mathbb{D}$.*

b) *Montrer que, pour tout $z \neq z_0$, $z \in \mathbb{D}$, on a :*

$$|\varphi(z)| \leqslant |z| \left| \frac{\overline{z}^{-1} - z_0}{z - z_0} \right| .$$

c) *Montrer que φ est valeurs dans le disque unit ferm.*

d) *Montrer l'ingalit :*

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{1 - |f(z_0|^2}{1 - |z_0|^2} .$$

Dans quel cas a-t-on galit ?

Exercice 7.3.10 *Soient $0 < r_1 < r_2$ et U un domaine de $\mathbb{C}$ contenant la couronne fermée*

$$C := \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}.$$

On suppose $0 \notin U$. Soit f holomorphe sur U, non identiquement nulle. Pour $r \in [r_1, r_2]$ on note $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

1. *Soit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que*

$$r^p M(r)^q \leq \max\{r_1^p (M(r_1))^q, r_2^p (M(r_2))^q\}.$$

2. *Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2),$$

et que pour tout $r \in [r_1, r_2]$ on a

$$r^\alpha M(r) \leq r_2^\alpha M(r_2).$$

3. *En déduire que pour tout $r \in [r_1, r_2]$, on a :*

$$M(r) \leq (M(r_1))^{\frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}} (M(r_2))^{\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}.$$

Exercice 7.3.11 *Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. Soient $D = D(0, 1[$ et pour $z \in \mathbb{D}$ on pose $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. On fixe $M \in \mathbb{R}^+$.*

1. *On suppose* $|a_n| \leq M$ *pour tout* $n \geq 0$. *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *on a :*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{1-|z|} \text{ et } |f'(z)| \leq \frac{M}{(1-|z|)^2}.$$

2. *On suppose* $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$. *Montrer que*

$$\forall n \geq 0,\ |a_n| \leq M \text{ et } \forall z \in \mathbb{D},\ |f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}.$$

3. *Soit* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *On suppose que* $|f(z)| \leq M$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *et* $f^{(j)}(0) = 0$ *pour* $j = 0, \cdots, k-1$.
   (a) *Montrer que* $|f(z)| \leq M|z|^k$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$.
   (b) *On suppose de plus qu'il existe* $a \in D \setminus \{0\}$ *tel que* $|f(a)| = M|a|^k$. *Expliciter* $f(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 7.3.12 *Soient* $R > 0$, $D = D(0, R[$, ∂D *la frontière de* D. *Soient* Ω *un domaine contenant* $\overline{D}$ *et* f *une fonction holomorphe sur* Ω.

1. *Montrer que si* $f_{|\partial D}$ *est constante alors* f *est constante sur* Ω.
2. *On suppose que* f *est non constante et que* $|f|_{|\partial D}$ *est constante égale à* c.
   (a) *Montrer que* $c \neq 0$ *et que* $|f(z)| < c$ *pour tout* $z \in D$.
   (b) *En considérant* $g : z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$, *montrer que* f *a au moins un zéro dans* D.

Chapitre 8

Points singuliers et fonctions méromorphes

8.1 Nature des singularités

Exercice 8.1.1 *1. Trouver l'ordre des pôles dans les cas suivants :*

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

2. Calculer, sans utiliser la partie singulière, les résidus de f en chacune de ses singularités isolées :

$$\begin{array}{lll} f(z) = \frac{z}{\sin z} & f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{z}{e^z+1} \\ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} & f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos(z)} \end{array}$$

Pour chacune des singularités isolés de f, donner l'expression de la partie singulière associée et (re)trouver le résidus correspondant :

$$\begin{array}{lll} f(z) = e^{1/z} & f(z) = z\cos(1/z) & f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}} \\ f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} \\ f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos z} & & \end{array}$$

Exercice 8.1.2 *Dterminer les singularits des fonctions suivantes, leur nature et les rsidus correspondants :*

$$\textbf{a)}\ \frac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}, \qquad \textbf{b)}\ cotanz - \frac{1}{z}, \qquad \textbf{c)}\ \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}, \quad \textbf{d)}\ \pi\, cotan(\pi\, z).$$

Exercice 8.1.3 *Soit U un ouvert connexe. Mme question que ci-dessus avec :*

a) $\dfrac{f'}{f}$, *lorsque f est une fonction holomorphe sur U.*

b) $\dfrac{g}{h}$, *lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un ple simple.*

c) $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, *lorsque f est une fonction holomorphe sur U, $z_o \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 8.1.4

1. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et soient g et h deux fonctions holomorphes au voisinage de a. On suppose que $g(a) \neq 0$ et que a est un zéro isolé de h d'ordre m. Montrer que a est un pôle d'ordre m de la fonction $f = \frac{g}{h}$.*
2. *"Réciproquement", soit f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$ où les a_j sont des pôles de f d'ordre m_j. Montrer qu'il existe g holomorphe dans U telle que $g(a_j) \neq 0$ $\forall j$ et telle que, $\forall z \in U \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$, on ait*

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)^{m_j}}.$$

8.2 Fonctions méromorphes

Exercice 8.2.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On rappelle qu'une fonction est méromorphe sur U si f est holomorphe sur $U \setminus S$ où les points de S sont les pôles de f.*

1. *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur U. Montrer que $f+g$ et fg sont méromorphes sur U.*
2. *Soit U un domaine et soit f une fonction méromorphe sur U avec $f \neq \tilde{0}$. Montrer que $\frac{1}{f}$ est méromorphe sur U.*
3. *Soit U un domaine et f une fonction méromorphe sur U avec $f \neq \tilde{0}$. Montrer que $\frac{f'}{f}$ est une fonction méromorphe dans U dont tous les pôles sont simples. Quels sont les résidus correspondants ?*

8.3 Divers

Exercice 8.3.1 1. *Soient* $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ *et* f *holomorphe sur* $D(a, r[\setminus\{a\}$. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *Pour tout voisinage* V *de* a *tel que* $V \subset D(a, r[$ *on a* $f(V \setminus \{a\})$ *est dense dans* $\mathbb{C}$.

   (b) *Pour* $\lambda \in \mathbb{C}$, *il existe* $(z_n)_n$ *une suite de nombres complexes tel que* $z_n \to a$, $z_n \neq a$ *pour tout* n *et* $f(z_n) \to \lambda$.

2. *On suppose que* a *est une singularité essentielle de* f. *En raisonnant par l'absurde montrer que la condition* (a) *ci-dessus est satisfaite. Conclusion ?*

Exercice 8.3.2 *Soit* f *une fonction entière.*

1. *Montrer que si* f *ne prend aucune valeur dans un voisinage* $a \in \mathbb{C}$, *alors* f *est constante.*

2. *Pour* $z \neq 0$, *soit* $g(z) = f(\frac{1}{z})$.

   (a) *Montrer que si* g *présente en* 0 *une fausse singularité alors* f *est constante.*

   (b) *Montrer que si* 0 *est un pôle d'ordre* n *pour* g *alors* f *est un polynôme de degré* n.

   (c) *Que peut-on dire d'une fonction entière* f *vérifiant* $f(z) \to \infty$ *quand* $z \to \infty$ *?*

Chapitre 9

Théorème des résidus

9.1 Le thorme des rsidus

Exercice 9.1.1 *Calculer* $I = \int_\gamma f(z)\,dz$*, avec*

1. $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \dfrac{5z^2+1}{z(z-1)}$.
2. $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}$.
3. $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 1$; $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$.
4. $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \dfrac{e^z}{z \sin z}$.

Exercice 9.1.2 *Soit* P *un polynme de degr* n *n'ayant que des racines simples ;* Q *un polynme de degr* $\leqslant n-2$*. On note par* γ_R *le circuit dfini par* $\gamma_R(t) = Re^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$*.*

1. *Dterminer* $\lim_{R\to+\infty} \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{Q(z)}{P(z)}\,dz$*.*
2. *Soient* $z_1, \ldots, z_n$ *les* n *racines complexes de* P*. Calculer*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}\,.$$

Exercice 9.1.3 *1.* a) *Montrer que* $g : z \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 z} - \dfrac{1}{z^2}$ *a une fausse singularit en* $z = 0$*.*

b) *Quelle est la partie singulire de* $z \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 z}$ *en* $z = 0$*, puis en chacun de ses ples ?*

2. *Soit* Δ *un domaine toil,* f *une fonction holomorphe sur* $\Delta \setminus S$*, o* S *est un ensemble de singularits isoles de* f*.*

a) *Montrer que* f *a des primitives sur* $\Delta \setminus S$ *si et seulement si* $\mathrm{Res}(f, a) = 0, \ \forall a \in S$*.*

b) *Appliquer ce critre la fonction* $z \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 z}$*. Quelles sont les primitives de cette fonction dans* $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *?*

3. *Avec les mmes conditions sur* Δ*,* f *et* S *que dans 2., on suppose de plus que* $\mathrm{Res}(f, a) \in \mathbb{Z}, \ \forall a \in S$*. On fixe* $z_0 \in \Delta \setminus S$*.*

a) *Justifier que, pour tout* $z \in \Delta \setminus S$*, il existe un chemin* γ_z *reliant* z_0 z *et trac dans* $\Delta \setminus S$*.*

b) *Montrer que l'expression* $\exp\left(\int_{\gamma_z} f(u)\, du\right)$ *ne dpend que de* z *et non du chemin* γ_z *choisi. Pour* $z \in \Delta \setminus S$*, on pose alors*

$$F(z) = \exp\left(\int_{\gamma_z} f(u)\, du\right).$$

c) *Soit* $z_1 \in \Delta \setminus S$ *et* D_1 *un disque ouvert de centre* z_1 *inclus dans* $\Delta \setminus S$*. Montrer que* f *a une primitive* g *dans* D_1 *et que,* $\forall z \in D_1$*, on a*

$$F(z) = F(z_1) \exp\left(g(z) - g(z_1)\right).$$

d) *Montrer alors que* F *est holomorphe sur* $\Delta \setminus S$ *et vrifie*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = f(z), \qquad \forall z \in \Delta \setminus S\,.$$

Exercice 9.1.4 1. *Soit* $f(z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$*.*

a) *Montrer que* f *est mromorphe sur* $\mathbb{C}$*. Prciser ses ples, leur ordre et les rsidus correspondant.*

b) *Pour $n \geqslant 1$, soit γ_n le circuit reprsentant la frontire du carr de sommets $(n+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Montrer qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que*

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \sup_{z \in \mathrm{Supp}\gamma_n} |f(z)| \leqslant M.$$

2. *Soient P et Q des polynmes dont les racines n'appartiennent pas $\mathbb{Z}$ et tels que $d°Q - d°P \geqslant 2$. On pose $R = \frac{P}{Q}$.*

   a) *Montrer que la srie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} R(k)$ est absolument convergente.*

   b) *Evaluer, pour n assez grand,*

   $$\int_{\gamma_n} f(z)R(z)\, dz$$

   o γ_n est le circuit dfini en 1.

   c) *En dduire que*

   $$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k R(k) = - \sum_{a \in \{ples\ de\ R\}} \mathrm{Res}(Rf, a).$$

   d) *On fixe $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Appliquer ce qui prcde pour calculer $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{(a-k)^2}$.*

Exercice 9.1.5 *En intégrant $\dfrac{e^{iz}}{z}$ sur le circuit suivant, puis en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$,*

calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$

9.2 Le thorme de Rouch

Exercice 9.2.1 *On fixe $a \in \mathbb{C}$, $|a| \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$. Montrer que l'quation $1 + z + az^n = 0$ a toutes ses racines dans le disque $D(0, 2[$.*

Exercice 9.2.2 *Soit $P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots a_m$ un polynme. On suppose que $|P(z)| \leqslant 1$, $\forall z \in D(0,1]$. Montrer qu'il existe z_0, $|z_0| = 1$, tel que $|P(z_0)| = 1$.*

Exercice 9.2.3 *Soient $a, b \in D(0, 1]$, $m, n \geqslant 1$. Montrer que l'quation*

$$z^m \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^n - b = 0$$

possde $m+n$ solutions dans $D(0, 1[$.

Exercice 9.2.4 *Soit $r > 0$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque ferm $D(0, r]$. Soit f holomorphe sur U. On suppose que*

$$|f(0)| + r|f'(0)| < m := \inf_{|z|=r} |f(z)|.$$

Montrer que f possde au moins deux zros dans le disque ouvert $D(0, r[$.

Exercice 9.2.5 *Soit $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $U = D(0, \frac{2r}{3}[$, et $\gamma_r : t \longmapsto re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.*

1. *On fixe $\omega \in U$. Montrer qu'il existe un unique $z (= z_\omega)$ tel que $|z| < r$ et $z^3 + z = \omega$.*

2. *ω tant toujours fix dans U, on note $f(\omega) = z_\omega$. Montrer que*

$$f(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{u(3u^2+1)}{u^3+u-\omega} \, du.$$