Master Ingénierie Mathématique -M1, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique Paramétrique année 2014-2015

Partiel du 12 Novembre 2014

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h. Le sujet est sur 2 pages (recto-verso)

Exercice 1. *(5 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la loi de Binomiale $\mathcal{B}in(m,p)$:

$$\mathbb{P}[X_i = x] = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, \qquad x \in \{0, 1, \cdots, m\} \text{ et } p \in]0,1[$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.
La valeur de p est inconnue et celle de m est connue.
1) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre p, estimateur qu'on va noter $\hat{p}_n$. *(1 point)*
2) On considère maintenant le paramètre $\theta = Var[X_i]$. Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ et étudiez son biais et sa convergence. *(2.5 points)*
3) Montrez qu'il n'existe pas un estimateur sans biais pour $\dfrac{1}{p(1-p)}$. *(1.5 points)*

Exercice 2. *(9 points)*
Considérons une variable aléatoire continue X de densité:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta - 1} 1\!\!1_{1 \leq x \leq \theta},$$

avec θ un paramètre inconnu, $\theta > 1$. Pour cette loi, on considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$.
1) Calculez l'espérance de X. *(0.5 points)*
2) Trouvez un estimateur pour θ en utilisant la méthode des moments. On note cet estimateur $\hat{\theta}_n^{(1)}$. Etudiez la convergence, le biais et l'efficacité de $\hat{\theta}_n^{(1)}$. *(2 points)*
3) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_n^{(2)}$, pour le paramètre θ. Trouvez la densité de cet estimateur. *(2.5 points)*
4) Etudiez le biais de $\hat{\theta}_n^{(2)}$. *(1.5 points)*
5) Sachant que

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq n} X_i] = \frac{n\theta + 1}{n+1}, \qquad Var[\max_{1\leq i\leq n} X_i] = \frac{n(\theta - 1)^2)}{(n+1)^2(n+2)},$$

étudiez la convergence et l'exhaustivité de $\hat{\theta}_n^{(2)}$. *(2 points)*
6) Comparer les variances $Var[\hat{\theta}_n^{(1)}]$ et $Var[\hat{\theta}_n^{(2)}]$. Conclusion. *(0.5 points)*

Exercice 3. *(3.5 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la variable aléatoire discrète X de loi Binomiale négative $NB(p, 2)$, avec la loi de fréquence:

$$f(x) = \mathbb{P}[X = x] = C_{x-1}^1 p^2 (1-p)^{x-2}, \qquad x = 2, 3, \cdots$$

L'espérance de cette variable aléatoire est $\frac{2}{p}$ et la variance est $\frac{2(1-p)}{p^2}$. Le paramètre p est tel que $p \in]0,1[$.
1) Montrer que f est une loi de la famille exponentielle. *(1 point)*
2) Déduisez un estimateur exhaustif pour le paramètre p. *(1 point)*
3) En utilisant la question 1), trouvez un estimateur sans biais pour le paramètre $\theta = \frac{1}{p}$. *(1.5 points)*

Exercice 4. *(2.5 points)*
On veut trouver l'intervalle de confiance pour la durée de guérison d'une maladie, en suivant un certain traitement.
Seize patients ont suivi le traitement. Vous trouvez ci-dessous, le nombre de jours après lesquels chaque patient a été guéri:

25, 22, 20, 21, 18, 25, 26, 15, 17, 22, 23, 19, 25, 24, 23, 25

En supposant que la durée de guérison est une variable aléatoire de loi Normale, donnez l'intervalle de confiance pour la durée moyenne de guérison, avec un niveau de confiance de 0.95.
Remarque *Vous n'êtes pas obligés de déduire la forme théorique de l'estimateur par intervalle. Vous pouvez utilisez la forme déjà obtenue en cours(TD).*