Master *"Mathématiques Appliquées, Statistique"* -M1, Université Claude Bernard, Lyon 1

Statistique Paramétrique année 2016-2017

Partiel du 16 novembre 2016

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Appareils connectables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h. Le sujet est sur 2 pages (recto-verso)

Exercice 1. *(11 points)*
Soit une variable aléatoire réelle X continue de fonction de densité:

$$f_\theta(x) = C\exp(-2\theta|x|) = \begin{cases} C\exp(2\theta x), & \text{si } x \leq 0 \\ \\ C\exp(-2\theta x), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre inconnu et C une constante (qui dépend de θ) qu'on déterminera plus loin. On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour cette loi (variable).
1) Déterminer la constante C. *(0.5 points)*
2) Sachant que $C = \theta$, calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire X. *(1.5 points)*
3) En utilisant la question précédente, trouvez un estimateur pour θ par la méthode des moments. On note cet estimateur par $\hat{\theta}_n^{(1)}$. Etudiez la convergence de $\hat{\theta}_n^{(1)}$. *(1.5 points)*
4) En utilisant l'expression $f_\theta(x) = \theta\exp(-2\theta|x|)$ pour $x \in \mathbb{R}$, pour la densité de aléatoire, trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{(2)}$ de θ. *(1.5 points)*
5) Soit la variable aléatoire réelle $Y = |X|$ et le n-échantillon correspondant $Y_i = |X_i|$, $i = 1, \cdots, n$. Ecrivez l'estimateur $\hat{\theta}_n^{(2)}$ fonction des variables aléatoires $Y_1, \cdots, Y_n$. *(0.5 points)*
6) Trouvez la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = |X|$. Trouvez la fonction de densité, notée g, correspondante. *(1.5 points)*
7) Sachant que $g(x) = 2\theta\exp(-2\theta x)\mathbb{1}_{x>0}$, calculez $\mathbb{E}[Y]$. *(1 point)*
8) La variable aléatoire X est-elle de type exponentiel? *(0.5 points)*
9) En utilisant la question précédente trouvez une statistique exhaustive pour θ. *(0.75 points)*
10) Etudiez la convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_n^{(2)}$, trouvé à la question 4). *(0.75 points)*
11) Calculez l'information de Fisher de la variable aléatoire X et ensuite de l'échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$, $i = 1, \cdots, n$. *(1 point)*

Exercice 2. *(3 points)*
Soit une variable aléatoire réelle X de loi $\gamma(1, \lambda)$, définie comme dans la fiche de TD1:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x>0},$$

avec $\lambda > 0$ un paramètre inconnu.
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la variable aléatoire X.

1) Si $\lambda = 1$, quelle est la loi de la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$? Justification. *(0.5 points)*
2) Pour un seuil $\alpha \in]0, 1[$ fixé, trouver le test uniformément le plus puissant (statistique de test et la règle de décision), pour tester l'hypothèse $H_0 : \lambda = 1$ contre $H_1 : \lambda > 1$. *(2.5 points)*

Exercice 3. *(2 points)*
On veut étudier la proportion des carpes dans un étang. Pour ceci, une pêche, jugée représentative da la population des poissons de l'étang, a été réalisée avec une filet. Sur les 1500 poissons pêchés, 500 sont des carpes. Donnez l'intervalle de confiance asymptotique pour la proportion des carpes de l'étang (avec un risque de 0.05).

Exercice 4. *(2 points)*
Un groupe de 25 étudiants ont passé un examen. Les notes (sur 20) varient de 5 à 18, avec une moyenne de 11.5 et un écart-type de 3.
Peut-on dire, avec un risque de 5% que la moyenne à cet examen est strictement plus grande que 11.25? On suppose que les notes sont des réalisations d'une loi Normale.

Exercice 5. *(2 points)*
Soit une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m, 2)$, avec $Var[X] = 2$. Sur la base d'un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la variable aléatoire X trouvez (faire toute la demarche) l'estimateur par intervalle pour m de niveau de confiance $1 - \alpha$, avec $\alpha \in]0, 1[$.