

Contrôle continu du 25 Mars 2008

Documents interdits. Calculatrice autorisée

Durée 3h

Exercice 1. (5 points)

On considère un n -échantillon de loi uniforme sur $[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$, pour $\theta > 0$.

1) Montrer qu'il n'y a pas unicité pour l'estimateur du maximum de vraisemblance. (2 points)

2) On considère trois estimateurs: $\hat{\theta}^{(1)} := \max(X_1, \dots, X_n) - 1/2$, $\hat{\theta}^{(2)} := \min(X_1, \dots, X_n) + 1/2$ et $\hat{\theta}^{(3)} := (\hat{\theta}^{(1)} + \hat{\theta}^{(2)})/2$. Montrer que $\hat{\theta}^{(3)}$ a une erreur quadratique plus faible que la moyenne arithmétique des deux autres erreurs quadratiques. (3 points)

Exercice 2. (11 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{1}_{x>0}$, avec $\theta > 1$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X . Rappelons que la densité d'une loi de χ^2 de $2k$ degrés de liberté est donnée par:

$$g_k(x) = \frac{1}{2^k(k-1)!} x^{k-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{x>0}$$

I. 1) Montrer que $\frac{2X}{\theta}$ suit une loi de $\chi^2(2)$. Quelle est la loi de $\frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i$? (1 point)

2) Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance du paramètre θ . (2 points)

3) Etudier les propriétés de $\hat{\theta}_n$. (3 points)

II. 1) Montrer que f est de type exponentiel. (1 point)

2) Déterminer l'estimateur par intervalle de θ . (2 points)

3) Pour un risque $\alpha \in (0, 1)$ fixé et θ_0 connu, déduire le test le plus puissant pour tester: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$. (2 points)

Exercice 3. (4 points)

Un lac est peuplé par 3 espèces de poisson. A l'équilibre écologique, la répartition par espèce est la suivante:

Espèce 1	Espèce 2	Espèce 3
44%	52%	4%

En fin de saison, on comptabilise le nombre de poissons de chaque espèce pêchés par les pêcheurs. On obtient le tableau suivant:

Espèce 1	Espèce 2	Espèce 3
370	380	50

Peut-on considérer que les prises de pêche sont en accord avec l'équilibre écologique?