

**Contrôle continu du 17 Mars 2009**

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois admises,  
autres documents interdits.

Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée

Durée 3h

**Exercice 1.** (3 points)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un n-échantillon pour la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\theta)$ , avec  $\theta > 0$  inconnu. Donner le biais de  $T_n = (1 - a/n)^{n\bar{X}_n}$ , estimateur pour  $\phi = e^{-a\theta}$ , où  $a \neq 0$  est une constante connue.

**Exercice 2.** (6 points)

**I.** Soit la variable aléatoire  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  avec  $\mathbb{E}(X) = m$  inconnue. Construisez l'estimateur par intervalle de niveau de confiance  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ . (3 points)

**II.** *Application* On a mesuré le poids de raisin par souche sur 10 souches prises au hasard dans une vigne. On a obtenu les résultats suivants (en kg):

2.4 3.2 3.6 4.1 4.3 4.7 5.4 5.9 6.5 6.9

**II.1.** On suppose que le poids de raisin par souche suit une loi Normale, donner un intervalle de confiance, au risque de 5%, de la variance. (1 point)

**II.2.** Tester, avec un risque de 5%, l'hypothèse que le poids moyen du raisin pour une souche dépasse 4.75kg. (2 points)

Pour faciliter les calculs, vous disposez des valeurs:  $\bar{x}_n = 4.7$  et l'estimation de l'écart-type  $s_n^* = 1.46$ .

**Exercice 3.** (11 points)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un n-échantillon. La fonction de densité de  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  est

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta} \mathbb{1}_{\alpha < x < \infty}$$

avec les paramètres  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ .

**1)** Calculer  $\mathbb{E}(X_i)$ ,  $\text{Var}(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . (1 point)

**2)** Donner  $F(x; \alpha, \theta)$  la fonction de répartition de  $X_i$ . (1 point)

**3)** Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $(\alpha, \beta)$ . Notons cet estimateur par  $T_n$ . (1.5 points)

**4)** Calculer le biais de  $T_n$ . (1.5 points)

**5)** Etudier la convergence de  $T_n$ . (1 point)

**6)** Donner un estimateur pour  $(\alpha, \beta)$  par la méthode des moments. (1 point)

**7)** Si le paramètre  $\alpha$  est supposé connu, donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\beta$ . Etudier ses propriétés. (4 points)