

Partiel du 25 Novembre 2009

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises, autres documents interdits.

Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée

Durée 3h (le sujet est sur 2 pages)

Exercice 1. (13 points)

Soit (X_1, \dots, X_n) un n-échantillon pour une variable aléatoire X continue

de densité:

$$f_{\theta}(x) = \frac{x}{\theta^2} \mathbb{I}_{x>\theta}, \quad \theta > 0$$

I. Estimation.

- 1) Calculer la fonction de répartition de X . (1 point)
- 2) Peut-on trouver un estimateur par la méthode des moments? Justification. (1.5 points)
- 3) Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$. (1.5 points)
- 4) Etudier les propriétés de $\hat{\theta}_n$. (4 points)

II. Test d'hypothèse. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contre

l'hypothèse $H_1 : \theta < \theta_0$, avec θ_0 une constante positive connue.

5) Etudier si la loi de X a un rapport de vraisemblance monotone par rap-

port à une statistique $T(X_1, \dots, X_n)$ à déterminer. (1.5 points)

6) Pour un paramètre $\theta \geq \theta_0$ calculer le risque $\alpha(\theta)$ de première espèce. (1.5

points)

7) Montrer que $\alpha = \sup_{\theta \geq \theta_0} \alpha(\theta) = \alpha(\theta_0)$. (1 point)

8) En utilisant les questions 5) et 7), trouver le test le plus puissant pour

un $\alpha \in (0, 1)$ fixé. (1 point)

Exercice 2. (2.5 points)

Soit (X_1, \dots, X_n) un n-échantillon pour la variable aléatoire X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Existe-il un estimateurs sans biais pour le paramètre $\theta = \frac{\lambda}{\lambda}$?

Exercice 3. (2.5 points)

Un médicament couramment utilisé est connu pour guérir 60% des patients traités. Un nouveau traitement est expérimenté sur 80 patients. On observe