Master Pro M1, MAIM-SITN, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique Paramétrique année 2010-2011

Partiel du 24 Novembre 2010
Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises, autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h

Exercice 1. *(10 points)*
Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon. La fonction de densité de X_i, $i = 1, ..., n$ est

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 1-\theta & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1+\theta & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} = (1-\theta)^{\mathbb{1}_{\frac{1}{2}<x<0}} \cdot (1+\theta)^{\mathbb{1}_{0\leq x<\frac{1}{2}}}$$

avec le paramètre $\theta \in]0, 1[$.
1) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{Var}(X_i)$, $i = 1, ..., n$. *(1 point)*
2) Trouvez un estimateur par la méthode des moments pour θ. Notons cet estimateur par $\hat{\theta}_n^{(1)}$. *(0.5 points)*
3) Etudier la convergence, le biais pour $\hat{\theta}_n^{(1)}$. Calculer $Var[\hat{\theta}_n^{(1)}]$. *(1.5 points)*

Considérons les variables aléatoires: $Y_i = \mathbb{1}_{0\leq X_i<\frac{1}{2}}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
4) Quelle est la loi de Y_i? et celle de S_n? *(1 point)*
5) Montrez que l'estimateur du meximum de vraisemblance de θ est fonction de S_n. Donnez l'expression de cet estimateur fonction de S_n.*(1.5 points)*
6) Considérons l'estimateur suivant pour θ: $\hat{\theta}_n^{(2)} = 2\frac{S_n}{n} - 1$. Etudiez la convergence et le biais de $\hat{\theta}_n^{(2)}$. Calculer $Var[\hat{\theta}_n^{(2)}]$. *(1.5 points)*
7) En utilisant les résultats des questions 3) et 6), lequel des deux estimateurs choisir. Justification. *(0.5 points)*
8) Construisez un estimateur par intervalle asymptotique de niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre θ. *(1.5 points)*

Exercice 2. *(2 points)*
On considère un n-échantillon $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, $i = 1, \cdots, n$, avec $0 < p < 1$. Soit la variable aléatoire $Y_i = X_i^k$ pour chaque $i = 1, \cdots, n$, avec $k \in \mathbb{N}$.
1) Quelle est la loi de Y_i? Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n Y_i$?*(1 point)*
2) Calculer $\mathbb{P}[\bar{X}_n = 0]$, $\mathbb{P}[\bar{Y}_n = 0]$, $\mathbb{P}[\bar{X}_n = \bar{Y}_n = 0]$. *(1 point)*
On rappelle que $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *et* $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

Exercice 3. *(4 points)*
On considère un n-échantillon $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \theta)$, $i = 1, \cdots, n$, avec $\theta > 0$. Donc $\mathbb{E}[X_i] = \theta$, $Var[X_i] = \theta$.
1) Trouvez l'estimateur du maximum vraisemblance $\hat{\theta}_n$ pour le paramètre θ. *(1.5 points)*
2) Etudiez la convergence de $\hat{\theta}_n$. *(1.5 points)*
3) Calculez l'information de Fisher pour la variable aléatoire X_i. *(1 point)*

Exercice 4. *(4 points)*
On considère deux variables aléatoires gaussiennes: $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Pour la variable aléatoire X on considère un n_1-échantillon $X_1, \cdots, X_{n_1}$ et pour Y un n_2-échantillon $Y_1, \cdots, Y_{n_2}$. On suppose $n_1, n_2 > 4$. Soient les variances empiriques pour ces deux échantillons:

$$S_{X,n_1}^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}_{n_1})^2, \quad S_{Y,n_2}^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y}_{n_2})^2$$

avec $\bar{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ et $\bar{Y}_{n_2} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$.
On s'intéresse au rapport des variance σ_1^2/σ_2^2.
On pose:

$$T_1 = n_1 \frac{S_{X,n_1}^2}{\sigma_1^2}, \qquad T_2 = n_2 \frac{S_{Y,n_2}^2}{\sigma_2^2}$$

1) Quelles sont les lois de T_1 et T_2? En déduire la loi de $Z_{n_1,n_2} = \frac{n_2-1}{n_1-1} \frac{T_1}{T_2}$. *(1 point)*
2) Calculer $\mathbb{E}[Z_{n_1,n_2}]$. En déduire un estimateur H_{n_1,n_2} sans biais pour σ_1^2/σ_2^2. *(1.5 points)*
3) Etudier la consistance de H_{n_1,n_2} pour σ_1^2/σ_2^2 pour $n_1 \to \infty$ et $n_2 \to \infty$. *(1.5 points)*