Master Pro M1-SITN, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique Paramétrique année 2011-2012

Partiel du 23 Novembre 2011

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h

Exercice 1. *(8 points)*
Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon. La fonction de densité de chaque X_i, $i = 1, ..., n$ est
$f_\theta(x) = \theta^2 x \exp(-\theta x) 1\!\!1_{x \geq 0}$, avec $1\!\!1_{\{.\}}$ la fonction indicatrice et θ un paramètre inconnu, $\theta > 0$.
1) Calculer $I\!\!E(X_i)$, $\mathrm{Var}(X_i)$, $i = 1, ..., n$. *(1 point)*
2) Trouvez un estimateur de θ par la méthode des moments. Etudier sa convergence. *(1 point)*
3) Si X est une variable aléatoire de densité $f_\theta(x)$ spécifiée plus haut, soit la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$. Donnez la fonction de densité g_θ de Y. *(1 point)*
4) En utilisant le fait qu'une densité de type exponentiel: $\exp\{C(\theta)T(x) + D(\theta) + S(x)\}$ peut s'écrire aussi sous la forme $\exp\{C(\theta)T(x) + D(\theta)\}\tilde{S}(x)$, avec $\tilde{S}$ une fonction positive, montrez que les densités f_θ et g_θ sont de type exponentiel. *(1 point)*
5) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.*(1 point)*
6) En supposant connu que la densité de $\sum_{i=1}^n X_i$ est

$$\frac{\theta^{2n}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \exp(-\theta x) 1\!\!1_{x \geq 0}$$

montrez que la densité de la variable aléatoire $T_n = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i}$ est

$$\frac{(2n)^{2n}}{(2n-1)!} \theta^{2n} x^{-(2n+1)} \exp\left(-\frac{2n\theta}{x}\right) 1\!\!1_{x \geq 0}$$

(0.5 points)
7) On considère T_n comme estimateur pour la paramètre θ. Est-il biaisé? *On sait que:*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!, \qquad n \in I\!\!N$$

(1 point)
8) Deduisez un estimateur sans biais. Est-il efficace? *(1.5 points)*

Exercice 2. *(3 points)*
On considère un n-échantillon $X_i \sim \mathcal{B}(m, p)$, $i = 1, \cdots, n$, avec $0 < p < 1$. On suppose $m \in I\!\!N$ connu et p inconnu. Considérons le paramètre $\theta = \frac{1}{p^2}$. Existe-il un estimateur sans biais pour θ?

Exercice 3. *(7 points)*

Un assureur considère que le coût d'un sinistre, est une variable aléatoire X qui suit une loi $\gamma(p, 1/\theta)$ avec p connu et θ inconnu. On considère un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ pour cette loi.
I. (*Estimation du paramètre θ*).
1) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ. Etudiez sa convergence et son biais. *(2 points)*
2) Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$? Calculez la densité de la variable aléatoire $Y = \frac{2\bar{X}_n}{\theta}$. La loi (densité) dépend-elle de θ? *(1.5 points)*

3) En utilisant les deux premières questions, construisez un estimateur par intervalle de niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre θ. *(1.5 points)*
II. (*Test d'hypothèse (le plus puissant)*).

Si θ_0 est connu, on veut choisir entre ces deux hypothèses:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \theta > \theta_0$$

4) Déterminer la zone de rejet du test Neyman-Pearson pour α fixé.*(2 points)*
Rappels. ***A)*** *La densité d'une loi gamma $\gamma(s, \lambda)$ est donnée par*

$$f(x) = \frac{\lambda^s}{\Gamma(s)} e^{-\lambda x} x^{s-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

B) *Si $Y \sim \gamma(s, \lambda)$ et $Z \sim \gamma(t, \lambda)$ avec Y et Z v.a. indépendantes, alors $Y + Z \sim \gamma(s + t, \lambda)$.*
C) *La loi $\chi^2(1)$ est une loi $\gamma(1/2, 1/2)$.*

Exercice 4. *(2 points)*
A midi, on mesure la température (en degrés) dans 9 endroits d'une ville. Les observations sont:

20, 21, 20.5, 19, 22, 23, 20, 21, 21.5

On vous dit que la température de l'air est de 20 degrés. Vous avez l'impréssion qu'il fait plus chaud. Faites un test d'hypothèse, de niveau de confiance 0.95, pour savoir qui a raison. On suppose que la température suit une loi Normale.