Master Pro M1-SITN, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique Paramétrique année 2012-2013

Partiel du 21 Novembre 2012
Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h. Le sujet est sur 2 pages (recto-verso)

Exercice 1. *(12 points)*
Soit une variable aléatoire continue X, de densité:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x>0}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre, inconnu. On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour cette loi (variable).

Partie I.

1) Calculez l'espérance $\mathbb{E}[X]$. *(0.5 points)*
2) Trouvez un estimateur pour le paramètre θ par la méthode des moments. Etudiez la convergence de cet estimateur.*(1.5 points)*
3) La loi est-elle de type exponentiel? Donner une statistique exhaustive pour θ.*(1.5 points)*

Partie II.

4) Calculez la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Calculez $\mathbb{P}[X \geq 2]$, probabilité qu'on va noter avec p.*(1.5 points)*
5) Donnez la loi de la variable aléatoire $Y = \mathbb{1}_{X \geq 2}$.*(1 point)*
6) Sur la base du n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ on a le n-échantillon $(Y_1, ..., Y_n)$, avec $Y_i = \mathbb{1}_{X_i \geq 2}$, pour $i = 1, \cdots, n$. Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p, si on connaît les variables aléatoires X_i, donc, les Y_i, $i = 1, \cdots, n$. On note cet estimateur avec $\hat{p}_n$. *(1 point)*
7) Etudiez l'efficacité et l'exhaustivité de $\hat{p}_n$. *(1.5 points)*
8) Montrer que $\hat{\theta}_n = -\frac{1}{2} \log \bar{Y}_n$ est un estimateur fortement consistant pour θ. On rappelle que $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.*(1 point)*

Partie III.
Pour la variable aléatoire $Y = \mathbb{1}_{X \geq 2}$ de la Partie II., et le n-échantillon correspondant $Y_i = \mathbb{1}_{X_i \geq 2}$, nous considérons un nouveau paramètre $\mu = p(1-p)$. On rappelle que $p = \mathbb{P}[X \geq 2]$.

9) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ. On note cet estimateur avec $\hat{\mu}_n$. *(1 point)*
10) L'estimateur $\hat{\mu}_n$ est-il convergent, sans biais?*(1.5 points)*

Exercice 2. *(4 points)*
On considère la une variable aléatoire continue X, de densité:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x>0}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre, inconnu. On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour cette loi (variable).

1) On rappelle la définition des lois de type gamma. La fonction de densité d'une loi gamma $\gamma(s,\lambda)$ est donnée par

$$g(x) = \frac{\lambda^s}{\Gamma(s)} e^{-\lambda x} x^{s-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}, \qquad \lambda, s > 0$$

avec

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

On rappelle que la somme de deux lois gamma indépendantes $\gamma(s,\lambda)$ et $\gamma(t,\lambda)$, est une loi gamma $\gamma(s+t,\lambda)$.
La loi de la variable aléatoire X est-elle de type gamma? Si oui, laquelle? *(1 point)*
2) En utilisant la question précédente, quelle est la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$? *(1 point)*
3) On suppose n fixé, donc connu. Pour un seuil $\alpha \in]0,1[$ fixé, trouver le test uniformément le plus puissant pour tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta < \theta_0$, pour un $\theta_0 > 0$ connu.
Remarque: vous pouvez vous en servir du résultat obtenu à la question précédente. (2 points)

Exercice 3. *(2 points)*
On considère un n-échantillon X_i, $i = 1, \cdots, n$, de loi Normale d'espérance m et de variance 2: $X_i \sim \mathcal{N}(m, 2)$.
Trouver l'estimateur par intervalle de paramètre m.
Remarque: il ne faut pas donner seulement la forme finale de l'intervalle, il faut déduire l'estimateur par intervalle.

Exercice 4. *(2 points)*
Pour traiter une certaine maladie, on utilise un traitement A, qui guérit 80% des malades. Avec un autre traitement B, sur 250 malades, 220 ont été guéri. Tester, avec un niveau de confiance de 0.95, si le traitement B a le même taux de guérison que le traitement A.
Note: Spécifier la variable aléatoire considérée et sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test et sa loi.