Master Ingénierie Mathématique -M1, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique Paramétrique année 2013-2014

Partiel du 13 Novembre 2013

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h. Le sujet est sur 2 pages (recto-verso)

Exercice 1. *(2 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$I\!P[X_i = x] = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x \in \{0,1\}, \text{ et } p \in]0,1[$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.
La valeur de p est inconnue. Le paramètre étudié est $\theta = \frac{1}{p^k}$ avec k un nombre naturel non-nul connu $k \in I\!N^*$.
1) Donnez l'ensemble Θ des valeurs possibles pour le paramètres θ. *(0.5 points)*
2) Soit $T_n = T(X_1, \cdots, X_n)$ un estimateur pour θ. Montrez qu'il ne peut pas être sans biais. *(1.5 points)*

Exercice 2. *(6.5 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.
1) Quelle est la loi pour chacune des variables aléatoires: X_i^2 pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $\sum_{i=1}^n X_i^2$? (Donnez seulement la loi, sans faire la preuve) *(0.5 points)*
2) Montrez que

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X}_n)^2$$

(0.5 points)
On considère le vecteur aléatoire colonne $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ et A une matrice carrée $n \times n$, telle que $AA^t = A^tA = I_n$ et la dernière colonne de la matrice A est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

On rappelle que A^t est la matrice transposée de A et I_n est la matrice identité d'ordre n. On rappelle également les notions de probabilités pour un vecteur aléatoire: l'espérance d'un vecteur aléatoire est le vecteur des espérances de chaque composante. La matrice de variance-covariance est $Var(\mathbf{X}) = I\!E\left[(\mathbf{X} - I\!E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - I\!E[\mathbf{X}])^t\right]$.
On considère le vecteur aléatoire colonne $\mathbf{Z} = A^t\mathbf{X}$.
3) Trouvez la loi du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$. *(1.5 points)*
4) Trouvez $I\!E[\mathbf{Z}]$ et ensuite $Var(\mathbf{Z})$. Donnez la loi du vecteur aléatoire $\mathbf{Z}$ *(1.5 points)*.
5) On note par $Z_1, \cdots, Z_n$ les éléments composant le vecteur $\mathbf{Z}$. Montrez que $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$. *(1 point)*
6) Montrez que $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$. *(0.5 points)*

7) En utilisant les questions précédentes, montrez que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2(n-1)$. *(1 point)*

Exercice 3. *(3 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la loi Normale $\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ avec $\theta > 0$ un paramètre inconnu, tel que $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ et $Var|X_i] = \theta^2$. On choisit deux estimateurs pour θ: $\hat{\theta}_n^{(1)} = \bar{X}_n$ et $\hat{\theta}_n^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}$.
1) Ces deux estimateurs sont-ils convergents? Justification. *(1 points)*
2) Calculez l'information de Fisher pour la variable aléatoire X_i. *(1 points)*
3) Etudiez l'efficacité de $\hat{\theta}_n^{(1)}$. *(1 point)*

Exercice 4. *(8.5 points)*
Considérons une variable aléatoire continue X de densité:

$$f_\theta(x) = c \cdot \exp(-\theta x + 1) \cdot \mathbb{1}_{x \geq -1}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre et c une constante (éventuellement dépendante de θ) à déterminer.
1) Montrer que $c = \theta \exp(-1 - \theta)$. *(0.5 points)*
On considère $X_1, \cdots, X_n$ un n-échantillon pour la variable aléatoire X.
2) Calculez $\mathbb{E}[X]$ et trouvez ensuite un estimateur de θ par la méthode des moments, estimateur qu'on va noter $\hat{\theta}_n$. *(1.5 points)*
3) Etudiez la convergence de $\hat{\theta}_n$. *(1 point)*
4) Montrez que la variable aléatoire X est de type exponentiel. *(1 point)*
5) Trouvez une statistique exhaustive pour θ. *(1 point)*
6) Sachant que la fonction de densité pour la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est

$$\theta^n e^{-\theta(x+n)} \frac{(x+n)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{x \geq -n}$$

trouvez la densité $h(z)$ pour la variable aléatoire $T_n = \frac{1}{1+\bar{X}_n}$. *(1.5 points)*
7) Si la réponse à la question 6) est

$$h(z) = \theta^n \frac{n^n}{(n-1)!} z^{-n-1} e^{-n\theta/z} \mathbb{1}_{z \geq 0}$$

calculez $\mathbb{E}[T_n]$. *(1 point)*
8) Si on considère T_n comme estimateur pour θ, étudiez son biais. Si il est biaisé, proposez un estimateur sans biais. *(1 point)*