

Corrigé exam M2: Stat inf

19 oct 2018

Exercice 1

$$1) E[X] = \frac{1}{2\theta} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) dx = -x \exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) dx \\ = -2\theta \exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) \Big|_0^{\infty} = 2\theta$$

$$2) \bar{X}_n = 2\theta \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{2}$$

3) La vrais :

$$L_n(\theta; X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = \prod_{i=1}^n (2\theta)^{-1} \exp\left(-\frac{X_i}{2\theta}\right) \mathbb{1}_{X_i \geq 0} \\ = (2\theta)^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n X_i\right) \mathbb{1}_{\min_{1 \leq i \leq n} X_i > 0}$$

L'ensemble

$$A = \{x; f_{\theta}(x) > 0\} =]0, \infty[\text{ ne dépend pas de } \theta$$

Donc, pour trouver l'EMV on trouve la solution de l'é

$$\frac{\partial \log L_n(\theta; X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta} = 0 \quad \forall X$$

$$\log L_n(\theta) = -n \log \theta - n \log 2 - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{si } \min X_i > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \log L_n(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{2}}$$

$$4) f(x) = \exp\left(-\frac{x}{2\theta} - \log \theta + \log \frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{x > 0} \\ = \exp(C(\theta) \cdot T(x) + D(\theta)) \cdot \tilde{S}(x)$$

$$\Rightarrow C(\theta) = -\frac{1}{2\theta}, \quad T(x) = x, \quad D(\theta) = -\log 2\theta, \quad \tilde{S}(x) = \mathbb{1}_{x > 0}$$

Donc f de type exponentiel.

(2)

5) Conformément aux résultats faits en cours, on a :

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(x_i) = \bar{X}_n$ est un estimateur sans biais

$$\text{pour } E[T(X)] = E[X] = 2\theta$$

$$\Rightarrow E[\bar{X}_n] = 2\theta \Rightarrow E[\hat{\theta}_n] = E\left[\frac{\bar{X}_n}{2}\right] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ sans biais}$$

Par LFFN: $\bar{X}_n \xrightarrow{P.S.} E[X] \Rightarrow \frac{\bar{X}_n}{2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.S.} \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P.S.} \theta$
 $\Rightarrow \hat{\theta}_n$ fortement convergent.

$\sum_{i=1}^n T(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i$ exhaustif pour $\theta \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i$
 exhaustif pour θ .

$$6) P = P[X > 1] = \int_1^{\infty} \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) dx = -\exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) \Big|_1^{\infty} = \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\right)$$

$$7) Y \sim \text{Ber}(p)$$

8) L'EMV de p est $\hat{p}_n = \bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > 1}$. C'est un estimateur sans biais, convergent, efficace et exhaustif pour θ .

Exercice 2 $X: \begin{cases} 1 & \text{si on vote pour C} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$X \sim \text{Ber}(p)$ $p = \text{proba de voter pour C.}$

$$\alpha = 0,05 \quad \bar{x}_n = 0,40$$

L'amplitude de l'intervalle de confiance pour p est :

$$2 \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot U_{1-\frac{\alpha}{2}}, \text{ avec } U_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ fractile}$$

d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$ ⁽³⁾
 Donc, il faut trouver n tel que:

$$0,03 = 2 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} \cdot 1,96 \Rightarrow n = \frac{4}{9} \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} \cdot (1,96)^2$$

$$= 4098$$

Exercice 3 X : la note d'un étudiant du groupe 1: $\sim N(m_1, \sigma_1^2)$
 Y : ———— 2: $\sim N(m_2, \sigma_2^2)$
 On veut tester les hypothèses:

(1) $H_0: m_1 = m_2$ $H_1: m_1 \neq m_2$

les deux groupes le même niveau.

Donc, on a comparaison de moyennes de deux lois Normales, de variances inconnues.

Pour tester (1), il faut d'abord comparer les variances.

(2) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Stat de test:

$$Z_1 = \frac{\max(S_{n_1}^{*2}, S_{n_2}^{*2})}{\min(S_{n_1}^{*2}, S_{n_2}^{*2})} = \frac{S_{n_2}^{*2}}{S_{n_1}^{*2}} \underset{H_0}{\sim} F(20, 20)$$

avec $S_{n_1}^{*2}, S_{n_2}^{*2}$ les variances empiriques de $(X_1, \dots, X_{n_1})$ et $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$, respectivement.

$n_1 = n_2 = 21$.

Zone de rejet: $R = \{Z_1 > \alpha_{1-\alpha}\} = \{Z_1 > 2,12\}$

factile d'ordre 0,9
 de la loi $F(20, 20)$

(4)

$$Z_1 = \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 = 1,56 \notin R \Rightarrow H_0 \text{ acceptée} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2.$$

On teste maintenant (1) :

$$\text{Stat de test : } Z_2 = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \underset{H_0}{\sim} t(40)$$

Réalisation de S :

$$S^2 = \frac{20}{40} (\Delta_{n_1}^{*2} + \Delta_{n_2}^{*2}) = \frac{\Delta_{n_1}^{*2} + \Delta_{n_2}^{*2}}{2} = 5,125$$

$$\text{Zone de rejet : } R = \{ |Z_2| > \underset{\uparrow}{t_{1-\frac{\alpha}{2}}} \} = \{ |Z_2| > 2,021 \}$$

factile ordre 0,975 de la loi $t(40)$.

$$\text{Réalisation : } Z_2 = \frac{12,5 - 13,5}{\sqrt{5,125} \sqrt{\frac{2}{21}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{10,25}{21}}} = -1,43 \notin R$$

$\Rightarrow H_0$ acceptée. Donc, avec un risque de 0,05 on peut dire que les deux groupes ont le même niveau.