Corrigé du Partiel du 21 Nov. 2012

M1 - SITM

Exercice 1

1) $\mathbb{E}(X) = \theta \int_0^\infty x e^{-\theta x} dx = \cancel{\theta}\left[x e^{-\theta x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x} dx$

$= \left[-\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\theta}$

2) $\overline{X}_n = \theta^{-1} \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$, $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P.S} \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \hat{\theta}_n$ fort. conv.

3) $f(x;\theta) = \exp(-\theta x + \log\theta) \cdot 1\!\!1_{x>0} \Rightarrow c(\theta) = -\theta$, $T(x) = x$

$D(\theta) = \log\theta$, $S^*(x) = 1\!\!1_{x>0} \Rightarrow$ loi de type exp.

$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur exhaustif pour θ.

4) $F(x) = \int_0^x f(t;\theta) dt = \theta \int_0^x e^{-\theta t} dt = -e^{-\theta t}\Big]_0^x = 1 - e^{-\theta x}$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$p = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - F(2) = e^{-2\theta}$

5) $Y = 1\!\!1_{X \geq 2} \sim \mathcal{B}(p)$

6) L'EMV de p d'une Bernoulli : $\hat{p}_n = \overline{Y}_n$

8) $\overline{Y}_n \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}(Y) = p \Rightarrow -2^{-1} \log \overline{Y}_n \xrightarrow{P.S} -\frac{1}{2} \log(p) = \theta$

9) $\mu = p(1-p)$. Si on considère la fonction $h :]0,1[\to [0, \frac{1}{4}]$

$h(p) = p(1-p)$ elle prend des valeurs dans un interv. bornée de $\mathbb{R}$. Alors l'EMV de μ est : $\hat{\mu}_n = \overline{Y}_n(1 - \overline{Y}_n)$

10) $\hat{\mu}_n \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}(Y)(1 - \mathbb{E}(Y)) = p(1-p) = \mu \Rightarrow \hat{\mu}_n$ fort. conv.

$\mathbb{E}(\hat{\mu}_n) = \mathbb{E}(\overline{Y}_n) - \mathbb{E}(\overline{Y}_n^2) = \mathbb{E}(\overline{Y}_n) - \mathrm{Var}(\overline{Y}_n) - \mathbb{E}^2(\overline{Y}_n)$

$= \mathbb{E}(Y) - \frac{\mathrm{Var}(Y)}{n} - \mathbb{E}^2(Y) = p - \frac{p(1-p)}{n} - p^2$

$= \frac{n-1}{n} p(1-p) = \frac{n-1}{n} \mu \Rightarrow \hat{\mu}_n$ asympt sans biais

$\Rightarrow \tilde{\mu}_n = \frac{n}{n-1} \overline{Y}_n (1 - \overline{Y}_n)$ estim sans biais