La loi de Bernoulli est de type exp :

$$g(x) = \mathbb{P}[Y = x] = p^x (1-p)^{1-x} \quad , \quad x \in \{0, 1\}$$
$$= \exp\left(x \log \frac{p}{1-p} + \log(1-p)\right) \rightarrow T(x) = x.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} T(Y_i) \text{ exhaustif pour } p \Rightarrow \hat{p}_n \text{ exh.}$$

et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(Y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y_n} = \hat{p}_n$ efficace pour p.

Exercice 2

1) $X \sim \gamma(1, \theta)$

2) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma(n, \theta)$

3) La vrais : $L_n(\theta) = \theta^n e^{-\theta n \overline{X_n}} \mathbb{1}_{\min x_i > 0}$.

Le Lemme de Neyman-Pearson : $\exists k > 0$ t.q :

$\alpha = \mathbb{P}[L_1 > k \cdot L_0 \mid \theta = \theta_0]$, avec $L_1 = L_n(\theta)$, $\theta < \theta_0$
$L_0 = L_n(\theta_0)$

$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta < \theta_0$.

$$\alpha = \mathbb{P}\left[\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n \exp\left(-n(\theta - \theta_0)\overline{X_n}\right) > k \mid \theta = \theta_0\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\exp(-n(\theta - \theta_0)\overline{X_n}) > k_1 \mid \theta = \theta_0\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\underbrace{-n(\theta - \theta_0)}_{+}\overline{X_n} > k_2 \mid \theta = \theta_0\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\overline{X_n} > k_3 \mid \theta = \theta_0\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > k_4 \mid \theta = \theta_0\right]$$

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma(n, \theta_0) \Rightarrow k_4$ est le fractile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\gamma(n, \theta_0)$.