(3)

Exercice 3 $X_i \sim \mathcal{N}(m, 2)$, $\theta = m$.

Estimateur sans biais de m : $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{2}{n})$

Soit la v.a : $Y_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$1-\alpha = \mathbb{P}[a < Y_n < b] \Rightarrow \begin{cases} a = u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ b = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$ fractiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow 1-\alpha = \mathbb{P}\left[-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{2}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$= \mathbb{P}\Big[\underbrace{\overline{X}_n - \sqrt{\tfrac{2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{A_n} \leq m \leq \underbrace{\overline{X}_n + \sqrt{\tfrac{2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{B_n}\Big]$$

Donc l'estimateur par intervalle de m est :

$$\left[\overline{X}_n - \sqrt{\tfrac{2}{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}} \; ; \; \overline{X}_n + \sqrt{\tfrac{2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Exercice 4

$X : \begin{cases} 1 \text{ si guéri par B} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \sim \mathcal{B}(p)$

p = la proba d'être guéri par B.

$H_0 : p = p_0$ $\quad H_1 : p \neq p_0$ $\quad p_0 = 0{,}80$.

Stat de test : $Z_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Zone de rejet : $R = \{|Z_n| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \{|Z_n| > 1{,}96\}$

La valeur de la stat de test :

$$z_n = \sqrt{250}\,\frac{\frac{220}{250} - 0{,}80}{\sqrt{0{,}80 \cdot 0{,}20}} = 3{,}13 > 1{,}96$$

$\Rightarrow z_n \in R \Rightarrow H_0$ rejetée

Donc le taux de guérison par B $\neq$ du taux de guérison par A.