Corrigé du Partiel : 13 Novembre 2013

Exercice 1

1) $\theta = \frac{1}{p^k}$, $\Theta =]1, \infty[$

2) $$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\dots,x_n)\cdot \mathbb{P}[(X_1=x_1)\cap\dots\cap(X_n=x_n)]$$

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\dots,x_n)\cdot \mathbb{P}[X_1=x_1]\dots\mathbb{P}[X_n=x_n]$$

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\dots,x_n)\, p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\dots p^{x_n}(1-p)^{1-}$$

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\dots,x_n)\, p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

~~Parce que~~ Si T_n est sans biais, on a :

$\mathbb{E}[T_n] = \frac{1}{p^k}$, $\forall p\in]0,1[$

$$\Rightarrow \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\dots,x_n)\, p^{k+\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = 1, \quad (1$$
$\forall p\in]0,1$

Les valeurs de $T(x_1,\dots,x_n)$ sont > 1.

$\sum_{i=1}^n x_i \in \{0,1,\dots,n\}$

Dans la relation (1) on fait $p\to 0$ et on obtient $0 = 1$, donc T_n n'est pas sans biai

Exercice 2

1) $X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow X_i^2 \sim \chi^2(1)$ et $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

2) $\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X_n})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X_n}\sum_{i=1}^n X_i + (\overline{X_n})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n(\overline{X_n})^2 + (\overline{X_n}$

(2)

3) $\forall X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ et indép $\Rightarrow \mathbb{X} \sim \mathcal{N}_n($

$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = (\mathbb{E}(X_1)\dots, \mathbb{E}(X_n)) = 0_n$

$$Var(\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \dots & Cov(X_1,X_n) \\ \vdots & \ddots & \\ Cov(X_1,X_n) & & Var(X_n) \end{bmatrix} = I_n$$

Donc $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}_n(0_n, I_n)$

4) $\mathbb{Z} = A^t\mathbb{X}$, $\mathbb{E}(\mathbb{Z}) = \mathbb{E}(A^t\mathbb{X}) = A^t\,\mathbb{E}(\mathbb{X}) = A^t.0_n = 0_n$

$Var(\mathbb{Z}) = \mathbb{E}[(\mathbb{Z}-\mathbb{E}(\mathbb{Z}))(\mathbb{Z}-\mathbb{E}(\mathbb{Z}))^t]$

$\cancel{= \mathbb{E}[(\mathbb{X}^t - \mathbb{E}(\mathbb{X}^t))AA^t(\mathbb{X}-\mathbb{E}(\mathbb{X})]}$

$= \mathbb{E}[(A^t\mathbb{X} - \mathbb{E}(A^t\mathbb{X}))(A^t\mathbb{X} - \mathbb{E}(A^t\mathbb{X}))^t]$

$= A^t.\mathbb{E}[(\mathbb{X}-\mathbb{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{X}-\mathbb{E}(\mathbb{X}))^t]A$

$= A^t.Var(\mathbb{X})A = A^tI_nA = A^tA = I_n$

$\mathbb{Z} = A^t\mathbb{X} \Rightarrow$ Chaque compozante z_i du vecteur aléatoire $\mathbb{Z}$ est une combinaison linéaire de v.a indép $X_1,\dots,X_n$, chacune de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc z_i est de loi Normale, donc le vecteur $\mathbb{Z}$ est Gaussien : $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}_n(0_n, I_n)$.

5) $\sum_{i=1}^n z_i^2 = \mathbb{Z}^t.\mathbb{Z} = (A^t\mathbb{X})^t(A^t\mathbb{X}) = \mathbb{X}^t.A.A^t\mathbb{X} = \mathbb{X}^t\mathbb{X}$

$= \sum_{i=1}^n X_i^2$

6) z_n est le dernier élément du vecteur $\mathbb{Z}$, il s'obtient en multipliquant la dernière ligne de A^t avec le vecteur $\mathbb{X}$. Donc :

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}X_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i = \sqrt{n}\,\bar{X}_1$$

7) $$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 \underset{2)}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n(\overline{X}_n)^2 \underset{5) et 6)}{=} \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} Z_i$$

$$Z_i \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Z_i^2 \sim \chi^2(1) \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} Z_i^2 \sim \chi^2(n-1).$$

$Z_1, \dots, Z_{n-1}$ indep

Exercice 3

1) $\hat{\theta}_n^{(1)} = \overline{X}_n \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X)$ par LFGN

Donc $\hat{\theta}_n^{(1)}$ est fortement convergent.

$\hat{\theta}_n^{(2)}$ est ~~la~~ racine carrée du moment empirique centré d'ordre 2.

$$\left(\hat{\theta}_n^{(2)}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}_n \sum_{i=1}^{n} X_i + n(\overline{X}_n)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n)^2$$

Par LFGN : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}^2(X) = 2\theta^2$

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X) = \theta$$

Donc $\hat{\theta}_n^{(2)} \xrightarrow{p.s} \sqrt{2\theta^2 - \theta^2} = \sqrt{\theta^2} = \theta$

2) $$f_\theta(x) = (2\pi\theta^2)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right)$$

$$\log f_\theta(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\theta^2 - \frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x) = -\frac{1}{\theta} + \frac{(x-\theta)}{\theta^2} + \frac{(x-\theta)^2}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} - 2\frac{x-\theta}{\theta^3} - \frac{2(x-\theta)}{\theta^3} - \frac{3(x-\theta)^2}{\theta^4}$$

$$= -4\frac{x-\theta}{\theta^3} - \frac{3(x-\theta)^2}{\theta^4}$$

$$I_1(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(X)\right] = \mathbb{E}\left[4\ \frac{X-\theta}{\theta^3} + 3\frac{(X-\theta)^2}{\theta^4}\right]$$

$$= \frac{4}{\theta^3}\ \mathbb{E}(X-\theta) + \frac{3}{\theta^4}\ \mathbb{E}(X-\theta)^2 = \frac{3}{\theta^4}\ \theta^2 = \frac{3}{\theta^2}$$

3) $\hat{\theta}_n^{(1)}$ est sans biais.

$$\text{Var}\left(\hat{\theta}_n^{(1)}\right) = \text{Var}(\overline{X_n}) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n}$$

$$\frac{1}{n I_1(\theta)} = \frac{\theta^2}{3n} < \frac{\theta^2}{n} = \text{Var}\left(\hat{\theta}_n^{(1)}\right)$$

Donc $\hat{\theta}_n^{(1)}$ n'est pas efficace.

Exercice 4

1) $f_\theta(x)$ doit être une densité. Donc : $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\,dx =$

$$1 = c\int_{-1}^{\infty} e^{-\theta x+1}\,dx = -c\cdot \frac{e^{-\theta x+1}}{\theta}\Big]_{-1}^{\infty} = c\ \frac{e^{\theta+1}}{\theta}$$

$$\Rightarrow c = \theta\cdot e^{-1-\theta}$$

2) $$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x)\,dx = \theta\int_{-1}^{\infty} x\, e^{-\theta(x+1)}dx$$

$$= -x\cdot e^{-\theta(x+1)}\Big]_{-1}^{\infty} + \int_{-1}^{\infty} e^{-\theta(x+1)}dx$$

$$= -1 - \frac{1}{\theta}e^{-\theta(x+1)}\Big]_{-1}^{\infty} = -1 + \frac{1}{\theta}$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est la réalization de $(X_1, \dots, X_n)$, on a : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbb{E}(X) \Rightarrow \overline{x}_n = -1 + \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{1+\overline{x}_n}$

5

Alors, un estimateur par la méthode des mome
est : $\hat{\theta}_n = \dfrac{1}{1+\overline{X_n}}$.

3) Par LFGN : $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X) = -1 + \frac{1}{\theta}$

Alors $\hat{\theta}_n = \dfrac{1}{1+\overline{X}_n} \xrightarrow{p.s} \dfrac{1}{1-1+\frac{1}{\theta}} = \theta$

Donc $\hat{\theta}_n$ est fortement convergent.

4) $f_\theta(x) = \theta \cdot e^{-1-\theta} \cdot e^{-\theta x + 1} \mathbb{1}_{x \geq -1}$

$= \theta \cdot \exp(-\theta(x+1)) \mathbb{1}_{x \geq -1}$

$= \exp(-\theta x - \theta + \log \theta) \cdot \mathbb{1}_{x \geq -1}$

$C(\theta) = -\theta$, $T(x) = x$, $D(\theta) = -\theta + \log\theta$, $\tilde{S}(x) = \mathbb{1}_{x \geq -1}$

5) Une statistique exhaustive pour θ est $\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n}$

6) Notons : $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors : $T_n = \dfrac{1}{1+n^{-1}Y_n}$

Soit φ une fonction mesurable continue bornée.

Alors :

$$\mathbb{E}[\varphi(T_n)] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{1}{1+n^{-1}Y_n}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{1+n^{-1}x}\right) \cdot \theta^n \cdot e^{-\theta(x+n)} \frac{(x+n)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{x \geq -n} \, dx$$

$y = \dfrac{1}{1+n^{-1}x} \Rightarrow y + n^{-1}yx = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1-y}{n^{-1}y} = \dfrac{1}{n^{-1}y} - \dfrac{1}{n^{-1}}$

$dx = -n y^{-2} dy$

⑥

$$= \theta^n \int_{\infty}^{0} \varphi(y)\, e^{-\theta n/y} \cdot \frac{n^{n-1}}{y^{n-1}\,(n-1)!} \,(-n y^{-2})\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} \varphi(y)\, \theta^n \cdot e^{-n\theta/y}\, \frac{n^n}{y^{n+1} \cdot (n-1)!}\, dy$$

Donc, la densité $h(y)$ de T_n est :

$$T(y) = \theta^n \cdot \frac{n^n}{y^{n+1}} \cdot \frac{e^{-n\theta/y}}{(n-1)!} \cdot 1\!\!1_{y \geq 0}$$

7) $\mathbb{E}[T_n] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot h(y)\, dy = \int_0^{\infty} (n\theta)^n\, y^{-n} \cdot \frac{e^{-n\theta/y}}{(n-1)!}\, dy$

On note $\frac{1}{y} = z \Rightarrow y = \frac{1}{z}$ $\quad dy = -z^{-2} dz$

$$= \frac{(n\theta)^n}{(n-1)!} \int_{\infty}^{0} z^n \cdot e^{-n\theta z}\, (-z^{-2})\, dz$$

$$= \frac{(n\theta)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} z^{n-2}\, e^{-n\theta z}\, dz$$

$$= \frac{(n\theta)^n}{(n-1)!} \left\{ \left[-\frac{z^{n-2} e^{-n\theta z}}{n\theta} \right]_0^{\infty} + \frac{n-2}{n\theta} \int_0^{\infty} z^{n-3} e^{-n\theta z}\, dz \right.$$

$$= \frac{(n\theta)^n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n\theta)^{n-2}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-n\theta z}\, dz$$

$$= \frac{(n\theta)^2}{n-1} \cdot \left(-\frac{e^{-n\theta z}}{n\theta} \right) \Big]_0^{\infty} = \frac{n\theta}{n-1} \neq \theta$$

8) T_n asympt sans biais. Estim sans biais : $\boxed{\tilde{T}_n = \frac{n-1}{n} T}$