

**Examen du 18 Janvier 2012**

Deux feuilles A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,  
autres documents interdits.

Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée

Durée 3h

**Exercice 1.** (8 points)

On considère  $X$  une variable aléatoire continue, de densité:

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{1}_{0 < x < 1}, \quad \theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon pour cette variable aléatoire.

- 1) Calculer l'espérance  $\mathbb{E}[X]$  et la variance  $\text{Var}(X)$  de la variable aléatoire  $X$ . (1 point)
- 2) Trouvez un estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments. (0.5 points)
- 3) Etudiez la convergence et le biais pour l'estimateur obtenu à la question 2). (1 point)
- 4) Soit la variable aléatoire  $Y = \log X$ . Donnez sa densité  $g(x)$  et sa fonction de répartition  $G(x)$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ . (1.5 points)
- 5) Etudiez l'efficacité de l'estimateur obtenu à la question 2). (1 point)
- 6) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ , par rapport à l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ . Ecrivez l'estimateur obtenu fonction des variables  $Y_1, \dots, Y_n$ . (1 point)
- 7) Etudiez la convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\tilde{\theta}_n$ . (1 points)
- 8) Si on considère  $\tilde{X}_n$  comme estimateur ponctuel pour  $\theta$ , trouvez l'estimateur par intervalle asymptotique, de niveau  $1 - \alpha$ , pour le paramètre  $\theta$ . (1 points)

**Exercice 2.** (3.5 points)

Soit une variable aléatoire  $X$  de loi normale d'espérance  $m$  et de variance 1:  $X \sim \mathcal{N}(m, 1)$ . On considère un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  pour cette variable aléatoire.

On veut réaliser un test d'hypothèse (avoir une statistique de test et sa zone de rejet), pour tester l'hypothèse  $H_0 : m = 1$  contre  $H_1 : m \neq 1$ .

- 1) Trouvez le test le plus puissant, pour tester  $H_0$  contre  $H_1$ , de risque  $\alpha$ . (1.5 points)
- 2) Trouvez le test de Wald, pour tester  $H_0$  contre  $H_1$ , de risque  $\alpha$ . (1.5 points)
- 3) Entre ces deux tests, lequel est préférable d'utiliser et pourquoi? (0.5 points)

**Exercice 3.** (2 points)

Une tablette de chocolat sera qualifiée de "qualité supérieure" si elle contient une teneur en cacao d'au moins 430 grammes par kilogramme. On effectue un contrôle de qualité sur un échantillon de 9 tablettes de chocolat. On obtient les teneurs (exprimées en grammes par kilogramme) suivantes:

405 424 463 391 412 437 434 440 475

Que peut-on conclure pour les niveaux de confiance de 80% et 95%? On suppose que la teneur en cacao d'une tablette suit une loi Normale.

**Exercice 4** (6.5 points)

On modélise le logarithme de la concentration du NO2 (en particules), de loi Normale, fonction de: le logarithme du nombre de voiture par heure, la température au sol (en degrés C), la vitesse

du vent (en m/s), la différence de température à 25m et au sol.

*Note: Les tests sont à faire pour un seuil  $\alpha = 0.05$ . Pour chaque test, écrire les hypothèses à tester, les modèles correspondants, les statistiques de test et leurs loi.*

Vous trouvez ci-joint le code R et les sorties associées.

- 1) Sur combien d'observations l'étude a-t-elle été réalisée? Justification. (0.5 points)
- 2) Ecrivez le modèle statistique correspondant. (1 point)
- 3) Tester si le modèle écrit à la question 2) est significatif. (1 points)
- 4) Donnez les estimations des paramètres du modèle. Interprétation. (1 point)
- 5) Tester chaque variable qui intervient dans le modèle. Vous donnez les détails pour une seule variable, pour les autres vous donnez que la conclusion. (2 points)
- 6) Quelle est la qualité globale d'ajustement de ce modèle? Interprétation. (0.5 points)
- 7) Donnez la prévision (ponctuelle) de la pollution en NO<sub>2</sub> si le nombre de voitures par heure est de 100, la température au sol est de 1 degré, la vitesse du vent est de 1(m/s) et la différence de température est de 1 degré. (0.5 points)