

Examen du 24 Janvier 2013

Deux feuilles A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.

Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée

Durée 3h

Exercice 1. (10 points)

On considère X une variable aléatoire continue, de densité:

$$f_{\theta}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot c \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) \mathbb{1}_{x>0}$$

avec $\theta > 0$ un paramètre, inconnu. La constante c est à déterminer. On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) pour cette loi (variable).

Partie I. (Estimation ponctuelle): (6.5 points)

- 1) Montrer que la constante c est égale à $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) = \sqrt{2\pi}$. (0.5 points)
- 2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$ et la variance $\text{Var}(X)$ de la variable aléatoire X . (1 point)
- 3) Trouvez un estimateur de θ par la méthode des moments, en considérant le moment d'ordre 1. On note cet estimateur par $\hat{\theta}_n$. (0.5 points)
- 4) Etudiez la convergence et le biais de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ obtenu à la question 3). L'information de Fisher exist-elle?(justification). Si oui, calculez l'information de Fisher pour la variable aléatoire X et ensuite pour le n -échantillon (X_1, \dots, X_n) . (2 points)
- 5) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ . On note cet estimateur par $\tilde{\theta}_n$. (1 point)
- 6) La loi de la variable aléatoire est-elle de type exponentiel? (0.5 points)
- 7) Etudiez la convergence, le biais, l'efficacité et l'exhaustivité de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{\theta}_n$. (1 point)

Partie II. (Estimation par intervalle)(2 points)

- 8) Calculez $\mathbb{E}[X^4]$. (0.5 points)
- 9) En utilisant le Théorème Central Limite, et les résultats de la Partie I., trouvez l'estimateur par intervalle asymptotique, de niveau $1 - \alpha$, pour le paramètre θ . (1.5 points)

Partie III. (Test le plus puissant)(1.5 points)

- 10) Pour un seuil $\alpha \in]0, 1[$ fixé, trouver le test uniformément le plus puissant, asymptotique ($n \rightarrow \infty$), pour tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$, pour un $\theta_0 > 0$ connu. (1.5 points)

Remarque: vous pouvez vous en servir du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 2. (3 points)

Soit une variable aléatoire X de loi normale d'espérance m et de variance 1: $X \sim \mathcal{N}(m, 1)$. On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) pour cette variable aléatoire.

On veut réaliser un test d'hypothèse (avoir une statistique de test et sa zone de rejet), pour tester l'hypothèse $H_0 : m \leq 1$ contre $H_1 : m > 1$.

- 1) Calculez le risque de première espèce $\alpha(m)$, quand $m \leq 1$. (1.5 points)

2) Trouvez le test le plus puissant, pour tester H_0 contre H_1 , de risque α . (1.5 points)

Exercice 3. (1.5 points)

On veut étudier l'évolution de la confiance dans le gouvernement d'un mois à l'autre. A la fin du mois de décembre, 50% des personnes faisaient confiance à la politique menée par le gouvernement. Pour le mois de janvier, sur 1300 personnes interrogées, 625 lui font confiance et 675 ne lui font pas. Avec un niveau de confiance de 0.95, est-ce que la confiance dans le gouvernement a baissé de manière significative le mois de janvier, par rapport au mois de décembre?

Note: Ecrire la variable aléatoire, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test et sa loi, la zone de rejet et la conclusion.

Exercice 4 (5.5 points)

Dans une expérience, on veut modéliser, en utilisant un modèle linéaire, le nombre d'insectes (la variable "count") fonction du type d'insecticide (la variable "spray") avec lequel la plante a été traitée.

Note: Les tests sont à faire pour un seuil $\alpha = 0.05$. Pour chaque test, écrire les hypothèses à tester, les modèles correspondants, les statistiques de test et leurs loi.

Vous trouvez ci-joint le code R et les sorties associées.

1) La variable "count" suit-elle une loi normale? Justification en utilisant un test d'hypothèse. En déduire, pourquoi à la place de la variable "count" on a considéré une variable transformée: sa racine carrée? (1 point)

2) Sur combien d'observations l'étude a-t-elle été réalisée? Justification. (0.5 points)

3) Quel type de modèle linéaire a-t-on utilisé? Ecrivez le modèle statistique correspondant à la fonction R "lm". (0.5 points)

4) Tester si le modèle écrit à la question 3) est significatif. (0.5 points)

5) Donnez les estimations des paramètres du modèle. Interprétation. (1 point)

6) Il y a-t-il des types d'insecticide qui ont la même action sur le nombre d'insectes? Justification par test d'hypothèse. (1 point)

7) Quelle est la qualité globale d'ajustement de ce modèle? Interprétation. (0.5 points)

8) Donnez la prévision (ponctuelle) du nombre d'insectes traités avec le spray F. (0.5 points)