

Examen, janvier 2010, première session

Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.

Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée

Durée 3h

Exercice 1. (7 points)

Considérons un n-échantillon X_1, \dots, X_n de loi de Pareto, de densité:

$$f_\theta(x) = \theta x^{-(\theta+1)} \mathbb{1}_{x>1}, \quad \theta > 0$$

- 1) Trouvez un estimateur de θ par la méthode des moments. (1.5 points)
- 2) Soit la variable aléatoire $Y = \log X$. Donnez sa densité $g(x)$ et sa fonction de répartition $G(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (1.5 points)
- 3) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ . (1.5 points)
- 4) Etudiez le biais et la convergence de $\hat{\theta}_n$. (1.5 points)
- 5) Calculez l'information de Fisher $I_n(\theta)$ du n-échantillon. (1 point)

Exercice 2. (2 points)

Sur un échantillon de 300 patients traités par un certain remède, 243 ont été guéris. Testez, pour un seuil $\alpha = 0.05$, l'hypothèse que la proportion de guérison est égale à 75%.

Exercice 3. (4 points)

Considérons un n-échantillon X_1, \dots, X_n de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$, avec λ_0 un positif connu.

- 1) Rappelez quelle est la forme de l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ . (1 point)
- 2) Trouvez la forme de la statistique de Wald. Quelle est sa loi asymptotique? (1.5 points)
- 3) Trouvez la statistique de test du rapport de vraisemblance. Quelle est la zone de rejet de H_0 pour un seuil $\alpha > 0$ fixé? (1.5 points)

Exercice 4. (7 points)

On modélise le temps de survie des patients souffrant d'un de ces cinq types de cancers: "Breast", "Bronchus", "Colon", "Ovary", "Stomach".

Vous trouvez ci-joint le code R et les sorties associées. Pour réaliser l'étude on peut utiliser soit la fonction *aov* soit la fonction *lm*. Vous choisissez une de ces fonctions, laquelle vous estimez mieux connaître et vous répondez aux questions suivantes.

- 1) Sur combien de patients l'étude a été réalisée? Justification. (1 point)

- 2) Ecrivez le modèle statistique correspondant. (1.5 points)
- 3) Testez si la survie d'un patient dépend du type de cancer. (2 points)
- 4) Donnez les estimations des paramètres du modèle. Interprétation. (1.5 points)
- 5) Quelle est la valeur du coefficient de détermination R^2 ? Interprétation. (1 point)

Note: Les tests sont à faire pour un seuil $\alpha = 0.05$. Ecrire les hypothèses à tester, les modèles correspondants, les statistiques de test et leurs loi.