Master Pro M1, MAIM-SITN, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique Paramétrique année 2010-2011

Examen, janvier 2011, première session
Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h

Exercice 1. *(8 points)*
Soit une variable aléatoire continue de fonction de répartition:

$$F_\theta(x) = \left[1 - \exp\left(-\frac{x^c}{\theta}\right)\right] 1\!\!1_{x>0}$$

avec $c > 0$ une constante connue. Le paramètre de la loi est $\theta > 0$. Considérons un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ pour X.
1) Calculez la fonction de densité $f_\theta(x)$ de X.*(0.5 points)*
2) Determiner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. *(1 point)*
3) Soit la variable aléatoire $Y = 2X^c/\theta$. Trouvez sa fonction de répartition, la fonction de densité. *(1 point)*
4) Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y. *(1 point)*
5) Soit l'estimateur $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^c$ de θ. Etudiez sa convergence, le biais et l'efficacité. *(1.5 points)*
6) En utilisant les résultats des questions 4) et 5), construire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ. *(1.5 points)*
7) Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1-\alpha$ pour θ.*(1 point)*
8) Sur la base du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$, en utilisant le résultat de la question 4), trouvez un estimateur par la méthode des moments. *(0.5 points)*

Exercice 2. *(4 points)*
Considérons un n-échantillon $X_1, \cdots, X_n$ de loi Uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. On rappelle que la densité de chaque variable aléatoire X_i est $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} 1\!\!1_{0 \le x \le \theta}$.
1) Rappelez quelle est la forme de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ. *(1 point)*
2) Donnez la loi (fonctions de répartition et de densité) de $\hat{\theta}_n$. *(1 point)*
3) On veut tester l'hypothèse $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta \neq 1$. Trouvez le test du rapport de vraisemblance. *(1.5 points)*
4) Peut-on utiliser le test de Wald? Justification. *(1 point)*

Exercice 3. *(2 points)*
Dans une expérience sur l'acuité visuelle, un chercheur a demandé à 15 patients d'évaluer la distance d'un objet placé à 20cm. Il a obtenu les résultats suivants, en centimètres:

17,20,21,14,18,19,19,16,24,21,19,23,15,21,20

Peut-on affirmer que les patients ont de la difficulté à évaluer correctement la distance? On considère un risque $\alpha = 0.05$ et on suppose que l'évaluation de la distance par un patient suit une loi Normale.
La moyenne empirique des 15 données est 19.13 et l'écart-type empirique est 2.8.

Exercice 4. *(6 points)*
On aimerait modéliser la pollution d'ozone *"'Ozone1"'* fonction de la durée de l'ensoleiment journalier *"'ensolei"'*, de la vitesse du vent maximale journalière *"'vent"'* et de la température maximale journalière *"'temp"'*.
Vous trouvez ci-joint le code R et les sorties associées.
1) Pourquoi on modélise la variable *"lnOzone1"*=log*(Ozone1)* et pas la variable *"'Ozone1"'*? *(1 point)*
2) Sur combien de jours l'étude a été réalisée? Justification. *(0.5 points)*
3) Ecrivez le modèle statistique correspondant à la fonction *lm* considérée. *(1 point)*
4) Tester si le modèle écrit à la question 3) est significatif. *(1 point)*
5) Donnez les estimations des paramètres du modèle. *(0.5 points)*
6) Tester si chacune des variables indépendantes influent la pollution d'ozone. Quelles variables on garde dans le modèle? *(1.5 point)*
7) Quelle est la valeur du coefficient de détermination R^2? Interprétation.*(0.5 points)*

Note: Les tests sont à faire pour un seuil $\alpha = 0.05$. *Ecrire les hypothèses à tester, les modèles correspondants, les statistiques de test et leur loi.*