

Examen RaN-Statistique, 27 Novembre 2008

Documents autorisés

Durée 2h

Exercice 1. (10 points)

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon de la loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, avec la densité:

$$f(x; (\alpha, \lambda)) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$

- 1) Trouver par la méthode des moments un estimateur de α et de λ . Prouver la consistance forte de ces estimateurs. (3 points)
- 2) Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ si $\alpha = 1$. (2 points)
- 3) Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α, λ) dans le cas général. Quelles propriétés peuvent être étudiées? (5 points)

Exercice 2. (5 points)

Le rythme cardiaque est une variable aléatoire Normale X en milieu urbain et Y en milieu rural. On suppose que X et Y ont la même variance. On dispose de deux échantillons de taille $n_1 = 200$ pour X et $n_2 = 100$ pour Y . On trouve alors $\bar{x}_{n_1} = 81$, $\bar{y}_{n_2} = 76$, $s_x^2 = 147$, $s_y^2 = 126$. Avec un risque de 0.05, tester si l'on peut dire que le rythme cardiaque en milieu urbain est plus élevé (strictement) que celui en milieu rural.

Exercice 3. (5 points)

On considère le modèle de régression linéaire simple:

$$Y_i = \alpha + \beta(X_i - \bar{X}_n) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

avec α et β des paramètres inconnus, X_i variables déterministes et ε_i indépendantes de loi Normale d'espérance nulle et de variance σ^2 . Les X_i ne sont pas tous égaux.

- 1) Trouver les estimateurs des moindres carrés pour α et β . (2 points)
- 2) Montrer que la matrice de variance-covariance des estimateurs des moindres carrés de α et β est:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \end{pmatrix}$$

(3 points)