

Examen du 19 Novembre 2013

Documents admis.

Calculatrice autorisée

Téléphones portables interdits.

Durée 1h30.

Exercice 1. (13 points)

On considère un n-échantillon (X_1, \dots, X_n) pour la loi Normale $\mathcal{N}(\theta, \theta)$, avec $\theta > 0$, un paramètre inconnu, tel que $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ et $\text{Var}[X_i] = \theta$.

- 1) Trouvez **deux** estimateurs de θ par la méthode des moments. Etudiez leurs convergence et biais. (3 points)
- 2) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ . Etudiez sa convergence. (3 points)
- 3) En utilisant un des estimateurs trouvés à la question 1), trouvez, **pour n fixé**, un estimateur par intervalle, de niveau de confiance $1 - \alpha$, avec $0 < \alpha < 1/2$. (2 points)
- 4) Donnez la loi de la variable aléatoire $Y_i = \frac{(X_i - \theta)^2}{\theta}$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Déduisez $\text{Var}(Y_i)$ et ensuite $\mathbb{E}[X_i^4]$. (2 points)
- 5) On veut tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta < \theta_0$, avec θ_0 une valeur positive de θ , connue. Trouvez le test le plus puissant pour réaliser ce test. (3 points)

Note: Pour les tests d'hypothèse des exercices suivants, écrire la variable aléatoire, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test et sa loi, la zone de rejet et la conclusion.

Exercice 2. (5 points)

Avant le deuxième tour de l'élection locale, deux candidats sont restés en lice: candidat(e) C1 et candidat(e) C2. Un sondage d'opinion est réalisé sur un échantillon représentatif de 1200 personnes. Sur ces 1200 personnes, 625 ont l'intention de voter pour le candidat C1 et 575 pour le candidat C2.

- 1) Avec un risque de 3%, peut-on affirmer que le candidat C1 va gagner l'élection? (2.5 points)
- 2) Donnez l'intervalle de confiance des intentions de vote pour les deux candidats, d'abord avec un niveau de confiance de 0.95 et ensuite avec 0.99. (2.5 points)

Exercice 3. (2 points)

Un producteur d'ampoules, veut vérifier la fiabilité d'une machine de production. Il doit remplacer la machine si le taux d'ampoules défectueuses dépasse (strictement) 5%. C'est pourquoi, pendant 9 jours il a compté le nombre d'ampoules défectueuses produit par la machine sur 100 ampoules prises au hasard. Voilà les résultats:

2, 5, 2, 8, 9, 5, 6, 7, 7

Doit-il remplacer la machine, avec un risque de se tromper de 0.01?