Master M2- SITN, Université Claude Bernard, Lyon1
Statistique inférentielle
année 2014-2015

Examen du 8 Décembre 2014,
Documents admis. Calculatrice autorisée
Téléphones portables interdits.
Durée 1h30.

Exercice 1. *(12.5 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ pour la loi log-Normale, de densité:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \left(\exp(-\frac{(\theta - \log x)^2}{2}) \right) 1\!\!1_{x>0}, \tag{1}$$

avec $\theta \in I\!\!R$ un paramètre inconnu.
On suppose connu que $I\!\!E[X_i] = \exp\left(\frac{\theta+1}{2}\right)$.
1) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ, sur la base du n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$. *(2 points)*
2) Calculez l'information de Fisher pour une variable aléatoire X_i et ensuite pour le vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$. *(1.5 points)*
3) Montrez que la loi de la variable aléatoire $Y = \log X$, avec X une variable aléatoire log-Normale de densité donnée par (1), est une loi Normale: $Y \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. *(2 points)*
4) Etudiez la convergence et le biais pour l'estimateur $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i$. En utilisant les questions précédentes, étudiez l'efficacité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$. *(3 points)*
5) Pour le n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$, trouvez un estimateur par intervalle, **si** n **est fixé**, pour le paramètre θ. L'estimateur par intervalle sera de niveau de confiance $1-\alpha$, avec $\alpha \in]0, 1[$ connu. *(2 points)*
6) On veut tester l'hypothèse $H_0 : \theta = 3$ contre l'hypothèse $\theta \neq 3$. Trouvez la statistique de test de Wald et sa loi asymptotique. Donnez la zone de rejet du test pour un risque $\alpha \in]0, 1[$ connu *(2 points)*.

Note: Pour les tests d'hypothèse de l'exercice suivant, écrire la variable aléatoire, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test et sa loi, la zone de rejet et la conclusion.

Exercice 2. *(7.5 points)*
On veut étudier la population de poissons d'un étang. Pour ceci, un échantillon (jugé représentatif) de 1600 poissons est pêché. Sur les 1600 poissons pêchés, 211 sont des Carpes.
1) Peut-on dire que, avec un risque de 0.03, les Carpes représentent une cinquième de la population de poissons de l'étang? *(2.5 points)*
2) Combien de Carpes doit-on pêcher parmi les 1600 poissons, pour pouvoir affirmer que, avec un niveau de confiance 0.95, les Carpes représentent au moins un quart de la population de poissons?*(2.5 points)*
3) On analyse maintenant le poids des 211 Carpes pêchées. On suppose que le poids d'une Carpe suit une loi Normale. Nous notons par x_1 le poids de la première Carpe, x_2 le poids de la deuxième Carpe, ..., x_{211} le poids de la deux-cent-onzième Carpe. Sachant que $\frac{1}{211}\sum_{i=1}^{211} x_i = 950$g et $\frac{1}{210}\sum_{i=1}^{211}(x_i - 950)^2 = 1600$, testez l'affirmation que (risque 0.05) le poids moyen d'un poisson de l'étang est d'au moins 1kg. *(2.5 points)*