

**Master Pro M2, SITN, Université Claude Bernard, Lyon1**

Outils Statistiques

année 2007-2008

**Examen, 20 Mars 2008**

Documents autorisés

Durée 2h

**Exercice 1.** On considère le processus stationnaire  $(X_t)_{t \in Z}$  qui satisfait l'équation:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in Z$$

avec  $(\varepsilon_t)_{t \in Z}$  un bruit blanc centré et de variance  $\sigma^2$ . On introduit le processus:  $Y_t = X_{-t}$ ,  $t \in Z$ .

1) Montrer:

$$Y_t = \frac{1}{\phi} Y_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t, \quad t \in Z$$

où  $(\tilde{\varepsilon}_t)_{t \in Z}$  est un bruit blanc que l'on déterminera.

2) Le processus  $Y_t$  est-il stationnaire?

**Exercice 2.** Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de processus stationnaire  $(X_t)_{t \in Z}$  qui satisfait l'équation:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in Z$$

avec  $(\varepsilon_t)_{t \in Z}$  un bruit blanc centré et de variance  $\sigma^2$  et  $\phi = \pm 1$ .

On raisonne par absurde: on suppose que  $(X_t)$  est stationnaire et soit  $\gamma(0) = \text{Var}(X_t)$  pour tout  $t \in Z$ .

1) Soit  $t \in Z$  fixé. Pour tout entier  $k \geq 1$ , on considère:  $W_k = X_t - \phi^k X_{t-k}$ . Calculer la variance de  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$ . Déterminer plus généralement la variance de  $W_k$ .

2) Calculer, en utilisant la question précédente, l'expression de la fonction d'autocovariance et ensuite de celle de autocorrélation. Dédire qu'on obtient une absurdité et donc que le processus  $X_t$  n'est pas stationnaire.

**Exercice 3.** Soit une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$ . On considère un n-échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  et soit  $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

1) Donner la fonction de répartition de  $X_{(n)}$ .

2) En utilisant le lemme Borel-Cantelli et la question précédente montrer que  $X_{(n)}$  converge en probabilité vers  $+\infty$  lorsque  $n$  converge vers  $+\infty$ .

**Exercice 4.** On a mesuré chaque mois pendant trois ans la consommation de fuel. On a modélisé ces données par un modèle de séries chronologiques. Les sorties SAS sont sur les trois pages qui suivent. Commentez les résultats. Quel modèle proposez-vous?