

Examen du 26 mars 2009

Exercice 1 On considère le processus aléatoire suivant:

$$X_t = 10 + 0.7X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

avec ε_t un bruit blanc (d'espérance 0 et variance 1).

- 1) Si le processus X_t est stationnaire calculer m son espérance.
- 2) Trouvez un nombre μ tel que le processus $Y_t = X_t - \mu$ est un processus ARMA(2,1):

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (1)$$

- 3) Est-ce que le processus Y_t est stationnaire? Est-il inversible?
- 4) Ecrivez le processus Y_t comme un processus MA(∞): $Y_t = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \varepsilon_{t-k}$. Déduisez une formule de récurrence entre les coefficients π_k et ensuite les deux premiers coefficients π_1 et π_2 .
- 5) Ecrivez le processus Y_t comme un processus AR(∞): $Y_t = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k Y_{t-k}$. Déduisez une formule de récurrence entre les coefficients ψ_k et ensuite les deux premiers coefficients ψ_1 et ψ_2 .

Exercice 2. On se propose de modéliser la production mondiale de pétrole entre les années 1880 et 1984. Vous trouvez le graphique de la production (en Millions de Barils) fonction de l'année dans la Figure 1. Sur la page suivante vous trouvez le programme SAS pour modéliser la production de pétrole.

- 1) Justifier le choix du modèle non-linéaire. Donnez la forme du modèle de régression non-linéaire et commentez les sorties SAS correspondantes.
- 2) Le modèle de régression non-linéaire est-il de bon qualité?
- 3) Les résidus du modèle de régression non-linéaire (représentés en graphique dans la Figure 2) sont ensuite modélisés par une série chronologique. Justifier ce choix par un test statistique .
- 4) Les résidus sont-ils stationnaires? Justification par test statistique.
- 5) On a considéré trois étapes d'identification. Décrivez chacune de ces trois étapes et justifiez (par un test statistique) le passage d'une étape à l'autre.
- 6) Ensuite on a considéré trois étapes d'estimation. Pourquoi ces trois possibilités ont été envisagées? Commentez les résultats obtenus par ces trois étapes.
- 7) Quelle série chronologique proposez-vous pour modéliser les résidus obtenus au point 1)? Justification.