

Examen du 19 Octobre 2018,

Documents sur papier admis. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, appareils connectables interdits.
Durée 1h15.

Exercice 1.

Soit une variable aléatoire continue réelle X , de densité:

$$f_{\theta}(x) = \frac{e\left(-\frac{x}{2\theta}\right)}{2\theta} \mathbb{1}_{x>0} = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{x}{2\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

avec le paramètre $\theta > 0$ inconnu.

On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) pour cette loi (variable aléatoire).

- 1) Calculez l'espérance $\mathbb{E}[X]$ de la variable aléatoire X .
- 2) Proposez un estimateur pour le paramètre θ par le méthode des moments.
- 3) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ . On note cet estimateur par $\hat{\theta}_n$.
- 4) Montrez que f est une loi de type exponentiel.
- 5) Etudiez la convergence, le biais et l'exhaustivité de $\hat{\theta}_n$.
- 6) Calculez la probabilité: $p = \mathbb{P}[X > 1]$.
- 7) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \mathbb{1}_{X>1}$?
- 8) On considère le n -échantillon $Y_i = \mathbb{1}_{X_i>1}$, pour $i = 1, \dots, n$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de p ? Quelles sont ses propriétés? (*vous pouvez utiliser des résultats démontrés en TD*).

Exercice 2.

On s'est intéressé aux intentions de vote pour un candidat C. Sur un échantillon de taille n , 40% des personnes déclarent voter pour C. Avec un risque de 0.05, quelle est la valeur de n , sachant que l'amplitude de l'intervalle de confiance pour la probabilité de voter le candidat C est de 0.03? On sait que $n \geq 100$.

Exercice 3.

On veut comparer les résultats de deux groupes d'étudiants à un examen (données fictives!!). Les deux groupes comptent 21 étudiants chacun. Les résultats obtenus sont:

- GROUPE 1: moyenne: 12.5, écart-type: 2
- GROUPE 2: 13.5, écart-type: 2.5

Peut-on dire, avec un niveau de confiance de 0.95, que les deux groupes ont le même niveau? (On suppose que la note obtenue par un étudiant suit une loi Normale.)

Note: il faut écrire la variable aléatoire du phénomène étudié, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test et sa loi, la zone de rejet et la conclusion.