Master Pro M1, MAIM, Université Claude Bernard, Lyon1
Techniques Probabilites et Statistiques année 2006-2007

Examen du 29 Mai 2007
Une feuille A4 avec les formules, tables des lois admises,
autres documents interdits.
Téléphones portables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h (le sujet est sur 3 pages)

Exercice 1. *(9 points)*
Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité:

$$f(x, y; \theta) = \begin{cases} \theta^{-2} x^{1/\theta - 1} e^{-y/\theta} & 0 < x \le 1; y \ge 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif que l'on se propose d'estimer à partir d'un échantillon $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ de couples indépendants de même loi que (X, Y).
1) Calculer les lois marginales de X et Y. Que remarque-t-on? *(1.5 points)*
2) Déterminer la loi de probabilité de $Z = -\log(X)$. *(1.5 points)*
3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ. *(1 point)*
4) En supposant connu que les variables aléatoires Y_i et Z_i ont la même loi, de densité: $\theta^{-1} e^{-\frac{x}{\theta}} 1\!\!1_{x>0}$, étudier les propriétés de $\hat{\theta}_n$: bias, convergence, efficacité. *(3 points)*
5) Trouver un intervalle de confiance (asymptotique) de niveau $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, pour θ à partir de lois usuelles. *(2 points)*

Exercice 2. *(6 points)*
Soit ε_{ij}, $i = 1, ..., k$ $j = 1, ..., n$, des variables i.i.d., de loi normale centrée réduite. Soit $m_1, ..., m_k \in I\!\!R$, on pose $Y_{ij} = m_i + \varepsilon_{ij}$ un modèle d'analyse de variance, pour $i = 1, ..., k$ et $j = 1, ..., n$.
1) Quels sont les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{m}_i$ de m_i $(i = , .., k)$? *(1 point)*
2) On se propose de construire une statistique de test pour les hypothèses

non linéaires:
$$H_0 : \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = 1, \qquad H_1 : \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \neq 1$$
Pour cela on propose d'utiliser la statistique de test
$$T_n = \sqrt{n}(\sum_{i=1}^{k} \hat{m}_i^2 - 1)$$
Montrer que T_n peut s'écrire sous la forme suivante:
$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} (U_i^n)^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} (U_i^n) m_i + \sqrt{n}(\sum_{i=1}^{k} m_i^2 - 1)$$
où $(U_i^n)_{i=1,\ldots,k}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. *(1 point)*
3) On suppose que H_0 est vérifiée. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} (U_i^n)^2$ converge en probabilité vers 0. En déduire que T_n converge en loi. Préciser la loi limite. *(2 points)*
4) On suppose que H_1 est vérifiée. En utilisant la question précédente, montrer que $\lim_{n\to\infty} |T_n| = +\infty$, presque sûrement. *(1 point)*
5) Déduire des questions précédentes une procédure de test pour décider entre H_0 et H_1. *(1 point)*

Exercice 3. *(5 points)*
Un médicament est administré selon un plan séquentiel à un groupe de sept sujets sains. L'administration A est l'administration de référence (sujets à jeun, monothérapie), l'administration B est faite après un petit déjeuner normal et l'administration C après un petit déjeuner riche en lipides. Le dosage sanguin du médicament (en ng/l) donne les résultats:

Sujets	**Admin. A**	**Admin. B**	**Admin. C**	*Moyenne*
1	57	61	47	55
2	61	66	52	59.67
3	81	85	69	78.33
4	100	103	87	96.67
5	75	82	67	74.67
6	88	97	75	86.67
7	102	115	83	100
Moyenne	80.57	87	68.57	78.72

(*Les données sont extraites de M. Doly, J.-C. Vennat, J.-M. Cardot, P. Cardot-Eléments de statistique et de probabilités, page 202)*

On veut étudier le dosage sanguin du médicament *fonction du repas pris (Administration) et du sujet.*
1) Ecrivez le modèle associé. *(1 point)*
2) Etudiez si le modèle écrit précédement est significatif. *(1 point)*
3) Pour le modèle écrit à 1), est-ce que le petit déjeuner influe le dosage sanguin du médicament? *(1 point)*
4) Pour le modèle écrit à 1), les sujets ont-ils le même dosage sanguin du médicament? *(1 point)*
5) Interprétez les estimations des effets des facteurs. *(1 point)*

Note: a) Les tests sont à faire pour un seuil $\alpha = 0.05$. *Ecrire les hypothèses à tester, les modèles correspondants, les statistiques de test et leurs loi.*
b) On connaît:

- *la somme totale ST=6704.4*
- $3[23.72^2 + 19.05^2 + 0.39^2 + 17.95^2 + 4.05^2 + 7.95^2 + 21.28^2] = 5341$
- $7[1.85^2 + 8.28^2 + 10.15^2] = 1225$