**Master Ingénierie Mathématique -M1, Université Claude Bernard, Lyon1**
Statistique Paramétrique année 2015-2016

**Partiel du 12 Novembre 2015**
Une feuille A4 avec les formules, tables des lois et des fractiles admises,
autres documents interdits.
Appareils connectables interdits. Calculatrice autorisée
Durée 3h. Le sujet est sur 2 pages (recto-verso)

**Exercice 1.** *(4 points)*
On considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}[X_i = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.
Soit $\theta = \lambda^2$.
**1)** Trouvez un estimateur par la méthode des moments pour le paramètre $\theta$. On note cet estimateur par $\hat{\theta}_n$. *(1 point)*
**2)** Etudiez le biais de $\hat{\theta}_n$. Si $\hat{\theta}_n$ est biaisé, proposez un estimateur sans biais. *(1.5 points)*
**3)** Etudiez la convergence de $\hat{\theta}_n$ et de l'estimateur sans biais obtenu à la question précédente. *(1.5 points)*

**Exercice 2.** *(2 points)*
On considère un échantillon de taille $n$ de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in (0, 1)$ inconnu. On considère le paramètre $\theta = \frac{1}{p^2(1-p)^3}$. Montrer qu'il n'existe pas d'estimateur sans biais pour $\theta$.

**Exercice 3.** *(7 points)*
Considérons une variable aléatoire continue $X$ de densité:

$$f_\theta(x) = \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{x>0},$$

avec $\theta$ un paramètre inconnu, $\theta > 0$. Pour cette loi, on considère un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$.
**1)** Montrez que $f$ est une loi de la famille exponentielle. *(1 point)*
**2)** Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_n$, pour le paramètre $\theta$. *(1.5 points)*
**3)** Trouvez la densité, notée par $g$, de la variable aléatoire $Y = X^2$. *(1 point)*
**4)** Si

$$g(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} \mathbb{1}_{y>0},$$

calculez l'espérance de la variable aléatoire $Y$. *(1 point)*
**5)** En utilisant les questions précédentes, étudiez le biais, l'efficacité et l'exhaustivité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$. *(1.5 points)*
**6)** Etudiez la convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_n$. *(1 point)*

**Exercice 4.** *(5.5 points)*
On considère un n-échantillon $X_i$, $i = 1, \cdots, n$, de loi Normale d'espérance zéro et de variance $\sigma^2$: $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Pour cette loi on prend comme paramètre à estimer $\theta = \sigma^2$. Donc, la densité de $X_i$ est:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), \qquad x \in I\!R.$$

**1)** Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre $\theta$, estimateur qu'on va noter $\hat{\theta}_n$. *(1.5 points)*
**2)** Etudiez le biais de $\hat{\theta}_n$. *(1 point)*
**3)** Quelle est la loi de $\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i^2$? Justification. *(1 point)*
**4)** Pour un niveau de confiance $(1-\alpha)$, trouver l'estimateur par intervalle de $\theta$. *(2 points)*

**Exercice 5.** *(1.5 points)*
On mesure le taux de cholestérol LDL (le mauvais cholestérol), mesuré en $g/l$, pour 16 patients (données fictives):

1.7 1.9 2 2.1 1.8 1.85 1.9 2.05 1.85 1.95 2 1.8 1.85 2 2.1 1.85

On suppose que le taux de cholestérol suit une loi Normale et les observations sont indépendantes. Donnez l'intervalle de confiance pour le taux moyen de cholestérol, avec un niveau de confiance de 0.95.
***Remarque*** *Vous n'êtes pas obligés de déduire la forme théorique de l'estimateur par intervalle. Vous pouvez utiliser la forme déjà obtenue en cours(TD).*