ORAL 01 - UTILISATION D'ARBRES, DE TABLEAUX, DE DIAGRAMMES POUR DES EXEMPLES DE DÉNOMBREMENT. DÉNOMBREMENT DES ARRANGEMENTS ET DES PERMUTATIONS.

1. Rappels des plans

1.1. Groupe 1.

(1) **Exemples de dénombrement.**

- (a) **Utilisation de tableaux.**
  Ex : fumeurs/non fumeurs, hommes/femmes.
  Principe de la somme. Démonstration.
- (b) **Utilisation de diagrammes.**
  Ex : activités dans un centre de loisirs.
  Principe d'exclusion-inclusion.
  Formule de Poincaré.
- (c) **Utilisation d'arbres.**
  Ex : nombres de 4 chiffres distincts commençant par 1
  Principe du produit.
- (d) **Principe du berger.**
  Enoncé du principe du berger.

(2) **Dénombrement des arrangements et des permutations.**

- (a) **p-listes.**
  Définition d'une p-liste.
  Cardinal de E^p. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
- (b) **Arrangements et permutations.**
  Définitions d'un arrangement, d'une permutation.
  Nombre d'arrangements. Nombre de permutations. Ex : garer des voitures dans un parking. Exo : compter les nombres vérifiant des propriétés.

1.2. Groupe 2.

(1) **Exemples de dénombrement.**

- (a) **Utilisation de tableaux.**
  Ex : fumeurs/non fumeurs, hommes/femmes.
  Principe de la somme.
- (b) **Utilisation d'arbres.**
  Ex : un point M se déplace sur un tétraèdre.
  Principe du produit.
- (c) **Utilisation de diagrammes**
  Exemple : langues dans une classe.
  Principe d'inclusion-exclusion.

(2) **Dénombrement des arrangements et des permutations**.

- (a) **p-listes**
  Définition d'une p-liste.
  Cardinal de E^p.
- (b) **Arrangements**
  Définition d'un arrangement. Notations A_n^p.
  Théorème : calcul de A_n^p. Démonstration.
  Ex : garer des voitures dans un parking.
- (c) **Permutations**
  Définition d'une permutation. Nombre de permutations.

(3) **Applications**
Probabilité que des personnes aient le même anniversaire.
Tirages avec remise et sans remise dans une urne.

2. Remarques sur les exposés

Les plans étaient quasiment les mêmes dans les deux groupes, et proposent une bonne approche de l'énoncé de la leçon. Ce qui peut faire une petite différence, ce sont les exemples choisis. Ici, la moitié était commune aux deux groupes, preuve qu'ils sont très classiques ! N'hésitez pas à être inventifs, il suffit de savoir ce que doit représenter chaque exemple, et à vous d'inventer le problème et les données. Ce n'en sera que plus original.

Il peut être bon de faire le lien entre les deux parties de l'énoncé : le dénombrement des arrangements et des permutations peut se faire à l'aide des objets combinatoires vus dans la première partie (arbres par exemples). Les principes de la somme, principe du produit, ... ne sont pas forcément "évidents". Il y a toute une théorie mathématique derrière (ensembles, bijections, ...). Les démonstrations de ces théorèmes sont donc souvent demandées à l'oral.

Les questions peuvent souvent enchaîner sur des dénombrements classiques : annagrammes, combinaisons, ... Ce ne sont pas forcément des exemples difficiles, il suffit d'appliquer les résultats énoncés dans l'exposé.

3. Quelques compléments

Pour revenir sur les questions posées après les exposés, voici quelques compléments faits dans un ou l'autre des deux groupes pour aller un peu plus loin.

3.1. Démonstration du principe du produit.

Si on fait successivement deux étapes A et B ayant chacune n_A et n_B possibilités, pourquoi le nombre d'issues possibles est-il $n_A \times n_B$? Ça semble évident, mais en fait ça se prouve mathématiquement.

On cherche donc à denombrer le cardinal de $\Omega = \{(x, y),\ x \in A, y \in B\}$.

On connait les possibilités de A : $x_1, x_2, \dots, x_{n_A}$. On va partitionner Ω :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_A} \Omega_i, \qquad \text{où } \forall i = 1 \dots n_A,\ \Omega_i = \{(x_i, y), y \in B\}$$

Ainsi, par le principe de la somme, $|\Omega| = \sum_{i=1}^{n_A} |\Omega_i|$.

Or, pour un certain i fixé entre 1 et n_A, Ω_i est en bijection avec B puisque le premier élément x_i est fixé. Ainsi, $|\Omega_i| = |B|$.

Au final,

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{n_A} |\Omega_i| = \sum_{i=1}^{n_A} |B| = \sum_{i=1}^{n_A} n_B = n_A \times n_B$$

3.2. Arrangements strictement croissants.

On cherche à déterminer le nombre $b(n, p)$ de p-listes strictement croissantes dans un ensemble de cardinal n. En fait, on va montrer que

$$b(n, p) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Les deux premières preuves sont sensiblement les mêmes. La troisième nécessite l'introduction des combinaisons.

Preuve 1 : Principe du produit. Pour construire un arrangement quelconque, on fait 2 étapes successives. On commence par choisir les p éléments de l'arrangement en question (dans l'ordre croissant), donc on a $b(n, p)$ possibilités. Puis, on choisit un ordre pour les p éléments : on a $p!$ possibilités. Donc par le principe du produit $A_n^p = b(n, p) \times p!$. Donc $b(n, p) = \binom{n}{p}$.

Preuve 2 : Principe du berger. À partir d'une p-liste strictement croissante, on peut construire $p!$ arrangements quelconque. Donc si sait compter le nombre d'arrangement, il suffit de diviser par $p!$ pour trouver le nombre cherché $b(n, p)$. Donc $b(n, p) = A_n^p p! = \binom{n}{p}$.

Preuve 3 : Bijection. On suppose connu le fait que $\binom{n}{p}$ compte les combinaisons de p éléments parmi n élements. Pour un sous-ensemble à p élements (non ordonné), on peut écrire les éléments d'une seule manière unique dans l'ordre croissant. On peut donc créer une bijection qui, a $\{x_1, \dots, \dots, x_p\}$ (écrits dans l'ordre croissant), associe la p-liste strictement croissante $(x_1, x_2, \dots, x_p)$. Ainsi, par équipotence, $b(n, p) = \binom{n}{p}$.

4. Quelques références pour faire votre leçon

Les plans proposés sont une très bonne base pour préparer votre leçon. Vous pouvez consulter également les document suivants

- `http://pagesperso-orange.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursT_fichiers/denomb_loisD04.pdf`
  Un cours complet (avec démonstrations) du programme de Terminale S en dénombrement.
- `http://megamaths.perso.neuf.fr/oral1/cden0003.pdf`
  Un document qui propose en plus quelques applications plus poussées en dénombrement (Section 6) : partitions d'un entier, problème de scrutin, ...

De plus, vous pouvez également consulter les deux épreuves de dossiers suivantes qui traitaient de dénombrement (les exercices du jury étaient plus axés sur les coefficients binomiaux) :

- Dossier du 05 Juillet 2006 : Nombre de trajets entre deux endroits à Manhattan.
- Dossier du 06 Juillet 2007 : Nombre de trajectoires dans le plan entre les points $(0, 0)$ et (n, m).