ORAL 02 - EXEMPLES DE PROBLÈMES DONT LA RÉSOLUTION FAIT APPEL À L'UTILISATION DE GRAPHES ORIENTÉS OU NON.

1. Rappels des plans

1.1. Groupe 1.

(1) **Chemins de longueur donnée.**
   (a) **Présentation du problème.**
   Parcours santé. Chemins de longueur donnée.
   Définitions : graphe, sommet, arêtes.
   (b) **Résolution du problème avec les matrices**
   Définitions : matrice d'adjacence M, chaînes.
   Théorème : terme (i, j) de M^k.
   Démonstration.

(2) **Problème d'incompatibilité et nombre chromatique**
   (a) **Présentation et modélisation du problème**
   Tâches à réaliser sur des machines.
   (b) **Coloriage et nombre chromatique**
   Définitions : coloriage, nombre chromatique, ordre du graphe, sous-graphe, graphe complet.
   Coloriage d'un graphe complet. Minoration de γ_G.
   Algorithme de Welsh et Powell.

(3) **Graphes probabilistes**
   (a) **Présentation et modélisation du problème**.
   Echanges de populations entre Canada et USA.
   Définitions : graphe orienté, graphe probabiliste, matrice de transition, système évolutif.
   Proposition : convergence du système évolutif.

(4) **Cycles et chaînes eulériens**.
On veut passer par tous les chemins du parcours santé.
Définitions : degré, graphe connexe, cycle, chaîne eulérienne, cycle eulérien.
Théorème d'Euler.

1.2. Groupe 2.

(1) **Introduction, vocabulaire et résultat du base.**
Problème : proverbes différents postés sur Facebook.
Définitions : graphe, sommet, arête, ordre, degré.
Lemme des poignées de mains.

(2) **Problème de coloriage**
Définitions : sommets adjacents, graphe complet, sous-graphe, coloriage, nombre chromatique.
Nbre chromatique pour un graphe complet, minoration de γ_G.
Algorithme de Welsh-Powell.

(3) **Chaînes et cycles eulériens**.
Problème : passerelles à franchir dans un jeu vidéo.
Définitions : chaîne, chaîne eulérienne, cycle eulérien, graphe connexe.
Théorèmes d'Euler.

(4) **Chaînes de longueur minimale**
Record de vitesse dans le jeu vidéo.
Définitions : graphe orienté, sommet adjacent, chaîne orientée, graphe pondéré, poids d'une chaîne.
Algorithme de Dijkstra.

(5) **Graphe probabiliste**
Arrêts du ballon par un gardien de foot.
Définitions : graphe probabiliste, matrice de transition.
Etat probabiliste à l'étape n.

2. Remarques sur les exposés

L'orateur du groupe 1 a préféré ne pas parler de parcours dans les graphes (Dijkstra,. . .), dans le groupe 2, ce sont les matrices d'adjacences que l'oratrice a préféré enlever. La leçon reste très longue cependant, n'hésitez pas à faire des transparents (bien choisis) pour gagner du temps.

Dans le groupe 1, nous avions les problèmes/exemples sur transparents et le vocabulaire/théorie au tableau, dans le groupe 2, les problèmes étaient présentés au tableau, et le vocabulaire des graphes était sur transparent. La deuxième solution semble plus adaptée à l'intitulé de la leçon, les graphes ne devant être que des outils lors de la résolution. Attention à ne pas surcharger non plus les transparents, il faut qu'ils restent lisibles, soyez concis !

Il y a peu de théorèmes, il est donc bon de savoir comment les démontrer (théorèmes d'Euler, bornes du nombre chromatique,. . .). L'utilisation des graphes probabilistes permet le lien avec les probabilités conditionnelles, la preuve du théorème de convergence dans le cas de deux états se ramène à des suites arithmético-géométriques, c'est donc assez transversal. Pensez-y pour les épreuves sur dossier qui portent sur les probabilités.

3. Quelques compléments

Pour revenir sur les questions posées après les exposés, voici quelques compléments faits dans un ou l'autre des deux groupes pour aller un peu plus loin.

3.1. Un problème de coloriage des arêtes.

Problème : on convie 6 personnes à un rendez-vous. Pourquoi parmi ces personnes, il y en a au moins 3 qui se connaissent (mutuellement) ou bien 3 qui ne se connaissent pas (mutuellement) ?

On peut modéliser la situation par un graphe. On a 6 sommets représentant les personnes, et on peut tracer une arête entre A et B lorsque A et B se connaissent.

Autrement dit, si on regarde le graphe complet à 6 sommets, il s'agit de colorier toutes les arêtes en deux couleurs : une arête $(A-B)$ est rouge si A et B se connaissent, et noire si A et B ne se connaissent pas.

Le but du problème est alors de montrer que, pour n'importe quel coloriage à 2 couleurs des arêtes du graphe complet, on trouve toujours soit un sous-graphe complet d'ordre 3 rouge, soit un sous-graphe complet d'ordre 3 noir. (Ici, ce seront donc des triangles).

Soit A une des personnes présentes au rendez-vous. Parmi les arêtes qui partent de A, il y en a au moins trois qui sont de la même couleur. Supposons (quitte à échanger les couleurs) que $A-B$, $A-C$ et $A-D$ soient rouges (A connait B, C et D)

Si entre les personnes B, C, D, deux d'entre elles se connaissent (par exemple C et D), alors on peut former un triangle rouge (ACD). Sinon, les trois personnes B, C, D, ne se connaissent pas et on a donc un triangle noir BCD.

3.2. Les graphes hamiltoniens.

Contrairement aux graphes eulériens où on cherche à passer par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, on peut se poser la question aussi si on peut passer par tous les sommets du graphe une et une seule fois.

Attention donc au problème que vous prenez pour illustrer les chaînes et cycles eulériens : il faut que ce soit les arêtes sur lesquelles on veut passer une et une seule fois, le problème des sommets est beaucoup plus difficile.

Un peu de théorie donc. On dit qu'une chaîne est *hamiltonienne* si elle passe une et une seule fois par tous les sommets du graphe. Un *cycle hamiltonien* est un cycle qui passe une et une seule fois par tous les sommets du graphe. Un *graphe hamiltonien* est un graphe qui admet un cycle hamiltonien.

Contrairement au problème de parcours des arêtes (cas eulérien), il n'y a pas de caractérisation des graphes hamiltoniens à l'aide des degrés, des nombres d'arêtes, ... Mais il existe quand même certaines conditions nécessaires et suffisantes.

- Si G est hamiltonien, pour tout sommet x de G, $d(x) \geq 2$.
- Si G est hamiltonien et x vérifie $d(x) = 2$, alors les deux arêtes qui partent de x doivent être dans le cycle hamiltonien.
- Si G est complet, alors G est hamiltonien.

Une condition suffisante intéressante est la suivante

Théorème d'Ore : *Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout couple de sommets non adjacents (x, y), on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.*

Corollaire (Théorème de Dirac) : *Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.*

Le corollaire est évident d'après le théorème. Démontrons le Théorème d'Ore.

Par l'absurde, supposons que G vérifie la propriété des degrés, mais que G ne soit pas hamiltonien. Quitte à rajouter des arêtes, on peut supposer que G soit maximal non-hamiltonien, autrement dit il suffit de rajouter une seule arête à G pour qu'il devienne hamiltonien.

Supposons que l'arête manquante soit $(A_n - A_1)$. Alors, il existe déjà dans G une chaîne $A_1 - A_2 - \ldots - A_n$. Le but est de montré qu'il existe un certain $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ tel que les arêtes $(A_1 - A_{i+1})$ et $(A_i - A_n)$ existent. On aura alors un cycle hamiltonien

$$A_1 - A_2 - \ldots - A_i - A_n - A_{n-1} - \ldots - A_{i+1} - A_1$$

ce qui fournira la contradiction.

Supposons qu'il n'existe aucun i tel que A_{i+1} soit adjacent à A_1 et A_i soit adjacent à A_n. Notons k le degré de A_n. Les sommets adjacents forment une suite $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, avec $2 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1$.

D'après la condition précédente, les sommets $A_{i_1+1}, \ldots, A_{i_k+1}$ ne sont pas adjacents à A_1. Donc le degré de A_1 est inférieur à $(n-1)-k$. Donc $d(A_1) + d(A_n) \leq n-1-k+k \leq n-1$ ce qui est faux.