ORAL 03 - COEFFICIENTS BINOMIAUX, DÉNOMBREMENT DES COMBINAISONS, FORMULE DU BINÔME. APPLICATIONS.

1. Rappels des plans

1.1. Groupe 1.

(1) **Coefficient binomial, dénombrement des combinaisons** Définitions : combinaison de p éléments parmi n. Notons $\binom{n}{p}$.
Théorème : formule explicite de $\binom{n}{p}$. Démonstration.
Propriétés : cas $p = 0$, $p = n$, $p > n$. Formule $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
Formule de Pascal. Démonstration.
Formule itérée de Pascal. Démonstration.
Exemples d'utilisation.

(2) **Formule du binôme de Newton**
Théorème : formule du binôme. Démonstration.
Corollaire : somme sur k et somme alternée sur k des $\binom{n}{k}$. Démonstration. Exercice : calcul de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

(3) **Applications**

(a) **de la formule itérée de Pascal**
Calcul des sommes $\sum k^p$ pour p fixé.

(b) **de la formule du binôme**
Linéarisation de $\sin^n(x)$.
Propriété $p|\binom{p}{k}$ et petit théorème de Fermat.

1.2. Groupe 2.

(1) **Introduction : le quinconce de Galton**
Principe de l'expérience. Modélisation.
Exploitation. Notation $\binom{n}{p}$. Cas $p = 0$, $p = n$. Formule de Pascal.

(2) **Nombre de parties de cardinal** p
Définition : Notation $\binom{n}{p}$. Combinaison de p éléments.
Théorème : Cas $p = 0$, $p = n$, $p = 1$. Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Relation de pascal. Démonstration.
Formule explicite. Démonstration.

(3) **Formule du binôme**.
Théorème : formule du binôme de Newton. Démonstration.
Propriétés : $\sum_k \binom{n}{k}$, $\sum_k (-1)^k\binom{n}{k}$, $\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$, $\sum_k k\binom{n}{k}$

(4) **Applications**
Exercice : mains dans un jeu de cartes avec 1R et 2D
Formule itérée de Pascal
Linéarisation de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$
Petit théorème de Fermat
Résolution de l'équation $x_1 + \ldots + x_n = r$, $x_i \in \mathbb{N}$.

2. Remarques sur les exposés

Les deux leçons présentées étaient assez bien fournies. Les différentes propriétés énoncées ont des preuves assez courtes, ce qui permet d'en faire plusieurs. Essayez de varier les preuves calculatoires, et les preuves combinatoires.

On peut rajouter la propriété $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, utile pour calculer par exemple l'espérance d'une loi binomiale, ou pour le calcul de la somme $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. On peut également parler de la formule de Vandermonde $\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$, facile à démontrer de manière combinatoire, et qui permet de montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ suit une loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Il est important aussi de savoir visualiser les différentes propriétés récurrentes des coefficients binomiaux sur le triangle de Pascal et de savoir démontrer combinatoirement ces formules, pour leur donner du sens.

3. Quelques compléments

Pour revenir sur les questions posées après les exposés, voici ci-dessous quelques compléments faits dans un ou l'autre des deux groupes pour aller un peu plus loin.

3.1. **Boules dans les boîtes.** Le nombre de manière de disposer p boules discernables $b_1, \ldots, b_p$ dans n boîtes discernables $B_1, \ldots, B_n$ est égal à k^n (on écrit une n-liste avec répétition éventuelle à k éléments possibles)

Le nombre de manières de disposer p boules indiscernables dans les n boîtes $B_1, \ldots, B_n$ de façon à ce que chaque boîte contienne au plus une boule, est $\binom{n}{p}$. (Il suffit de choisir les p boîtes dans lesquelles on place une boule).

Le nombre de manière de disposer p boules indiscernables dans les n boîtes précédentes mais sans condition supplémentaire, est $\binom{p+n-1}{p}$. En effet, il suffit d'écrire en ligne les p boules et de placer les $n-1$ séparations de boîtes entre elles :

$$\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc||\bigcirc|\bigcirc|$$

On écrit donc un mot à $p+n-1$ éléments (fait de "$\bigcirc$ et des "$|$") où il faut choisir la place des p "$\bigcirc$", d'où le résultat.

Si de plus, on veut imposer que chaque boîte soit non vide, le nombre de possibilités fait alors $\binom{p-1}{n-1}$. En effet, déjà si $n > p$, il n'y a pas de possibilités et ensuite, il y a n boules imposées (une dans chaque boîte), puis on refait le raisonnement précédent, on veut placer les $p-n$ boules restantes dans les n boîtes. Il y a donc $\binom{(p-n)+n-1}{p-n} = \binom{p-1}{n-1}$ possibilités.

3.2. **Formule multinomiale.** La formule du binôme $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ peut être généralisée à une somme de j nombres $a_1, a_2, \ldots, a_j$, de la manière suivante : $(a_1 + a_2 + \ldots + a_j)^n = \sum C(n_1, n_2, \ldots, n_j) a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_j^{n_j}$ où les entiers n_i vérifient $n_1 + n_2 + \ldots + n_j = n$ et $C(n_1, n_2, \ldots, n_j)$ est un coefficient à déterminer. En effet, comme dans la preuve combinatoire du binôme de newton, un terme du développement du produit du membre de gauche sera un produit de a_1, de a_2, ... de manière à ce qu'il y ait n facteurs en tout, ce qui explique le $n_1 + n_2 + \ldots + n_j$.

A présent, combien y a-t-il de facteurs ayant n_1 "a_1", n_2 "a_2, ... ?

Dans les n facteurs, on sait qu'on a n_1 "a_1, il y a donc $\binom{n}{n_1}$ choix pour placer les a_1. Puis, une fois ce choix fait, il reste $\binom{n-n_1}{n_2}$ choix pour placer les a_2. Puis, une fois ce choix fait, il reste $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ choix pour placer les a_3, ...

Ainsi,

$$C(n_1, \ldots, n_j) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{j-1}}{n_j} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_j!}$$

On obtient donc

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_j)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_j!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_j^{n_j}$$

où la somme se fait sur tous les j-uplets $(n_1, \ldots, n_j)$ tels que $n_1 + \cdots + n_j = n$, j variant de 1 à n.

3.3. **Mais pourquoi $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est-il entier ?** Bon, après réflexion, je vois deux manières de procéder.

Première méthode : très simple (mais pourquoi on y pense pas ?) on montre la formule de Pascal (par le calcul), puis par récurrence sur n, c'est quasi-direct : si $\binom{n-1}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$ sont entiers par hypothèse de récurrence, alors $\binom{n}{k}$ sera aussi entier par somme.

Deuxième méthode : plus élégante du point de vue arithmétique (mais compliquée). Pourquoi $k!(n-k)!$ divise-t-il $n!$?

Il suffit de montrer que pour chaque p premier, la *valuation p-adique* de $k!(n-k)!$ est inférieure à $n!$, où, si on décompose $n! = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ en produit de nombres premiers ($p_i \neq p_j$), la *valuation p_i-adique* de $n!$, c'est le nombre α_i. Il faut montrer que pour tout nombre premier, dans $\binom{n}{k}$ la valuation p-adique du numérateur est supérieure à celle du dénominateur.

En fait, $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Pourquoi ? car $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$ désigne exactement le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont multiples de p^k (donc de valuation $\geq k$). Donc le nombre d'entiers entre 1 et n dont la valuation est exactement k est $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$. Donc

$$v_p(n!) = v_p(1) + \ldots + v_p(n) = \sum_{k \geq 1} k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Donc maintenant,

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right) = v_p(n!) - v_p(k!) - v_p((n-k)!) = \sum_{i \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \right)$$

Or,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor.$$

car $\lfloor x \rfloor \leq x$, $\lfloor y \rfloor \leq y$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier plus petit que $x+y$, donc plus petit que $\lfloor x+y \rfloor$.

Ainsi, la valuation p-adique de $\dbinom{n}{k}$ est bien toujours positive pour tout nombre premier p.