.

ORAL 15 - CONSTRUCTION DU CORPS $\mathbb{Q}$ DES RATIONNELS

1. Rappels des plans

1.1. Groupe 1.

(1) **Définition de $\mathbb{Q}$.**

(a) **Construction de $\mathbb{Q}$.**
Relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
Définition de $\mathbb{Q}$ comme ensemble des classes d'équivalence.

(b) **Lois internes**
Définition des lois $+, \times$ sur $\mathbb{Q}$.
Compatibilité des lois avec la relation d'équivalence.

(2) **Propriétés de $\mathbb{Q}$.**

(a) $\mathbb{Q}$ **est un corps.**
Démonstration du théorème.
Définition du numérateur et du dénominateur d'un rationnel.

(b) $\mathbb{Z}$ **est un sous-anneau.**
Homomorphisme d'anneaux injectif entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

(3) **Propriété universelle**
$\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$ à isomorphisme près : démonstration.

1.2. Groupe 2.

(1) **Analyse du problème**.
Tout $r \in \mathbb{Q}$ s'écrit $p.q^{-1}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
Notation p/q.
Egalité de p/q et p'/q'.

(2) **Synthèse du problème**.

(a) **Construction de $\mathbb{Q}$**.
Relation d'équivalence.
Définition des lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Q}$.
Compatibilité de la relation d'équiv. avec les lois : démonstration.

(b) **Structure de $\mathbb{Q}$.**
$\mathbb{Q}$ est un corps commutatif.

(c) **Prolongement de $\mathbb{Z}$.**
Homomorphisme d'anneau injectif entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

(3) **Propriétés de $\mathbb{Q}$**.
Ecriture irréductible d'un rationnel.
Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$.
Infinitude et dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.

2. Remarques sur les exposés

Le plan du Groupe 1 proposait une construction de $\mathbb{Q}$ valable mais un peu "parachutée". La relation d'équivalence et l'introduction des lois $+$ et $\times$ sont données mais on peut s'attendre ensuite à des questions du jury sur le choix de ces lois et pas d'autres. Il manquait l'écriture irréductible d'un rationnel, utilisée dans les questions, mais pas introduite dans le plan. La dernière partie sur la "propriété universelle" est intéressante mais d'un tout autre niveau que le reste de la leçon. Lancez-vous dedans seulement si vous avez bien compris car des questions du jury peuvent s'y ramener ensuite. On aurait pu également ajouter d'autres propriétés comme la relation d'ordre, la dénombrabilité, voire la densité.

Le plan du Groupe 2 proposait une construction par analyse et synthèse de $\mathbb{Q}$. L'idée est bonne mais il aurait fallu plus détailler la partie analyse. Le choix des lois $+$ et $\times$ n'apparaissait pas clairement. Le reste de la leçon était assez complet et bien organisé.

Les questions posées aux deux orateurs étaient sensiblement les mêmes. Il est bon de savoir à quel niveau de sa scolarité un élève rencontre les rationnels, les irrationnels, et les autres ensembles de nombres. Pour cela, vous pouvez consulter :

- Les programmes officiels du collège :
`http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html`
- Les documents d'accompagnement des programmes :
`http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe.html`

En particulier, dans ces derniers documents, la partie "Les nombres au collège".

3. Quelques compléments

Pour revenir sur les questions posées après les exposés, voici quelques compléments faits dans un ou l'autre des deux groupes pour aller un peu plus loin.

3.1. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Preuve 1 : Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors $\exists!(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \;/\; \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Alors $2q^2 = p^2$. Ainsi, 2 divise p^2, ce qui implique que 2 divise p. Alors il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors $q^2 = p^2/2 = 2k^2$ et 2 divise q^2 d'où 2 divise q. Ainsi 2 divise p et q, donc leur pgcd. Ce qui est absurde puisque $p \wedge q = 1$.

Cette preuve repose sur la divisibilité par 2, et le fait que si $2|n^2$, alors $2|n$. On peut éviter l'utilisation de ce lemme si on utilise la preuve suivante :

Preuve 2 : On utilise le fait que $1 < \sqrt{2} < 2$. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Notons $E = \{n \in \mathbb{N}^* \;/\; \sqrt{2}n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble est non vide puisque $\sqrt{2}$ est supposé rationnel. E admet alors un plus petit élément n_0.
Montrons que $n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 \in E$ avec $0 < n_1 < n_0$.
Puisque $1 < \sqrt{2} < 2$, on a $n_0 < n_0\sqrt{2} < 2n_0$, donc $0 < n_1 < n_0$.
De plus, $\sqrt{2}n_1 = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ comme différence de deux entiers et $n_1 = n_0(2-\sqrt{2}) > 0$ puisque $\sqrt{2} < 2$. Comme $n_1 > 0$, on en déduit que $n_1 \in E$, mais c'est impossible puisque n_0 était le plus petit élément de E.

3.2. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Le fait que $\mathbb{Q}$ soit dense dans $\mathbb{R}$ repose sur le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien, autrement-dit, si x et y sont deux réels tels que $0 < x < y$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soient x et y deux réels quelconques tels que $x < y$. On cherche donc un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Notons $\varepsilon = y - x > 0$. D'après le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe au moins un entier n tel que $\varepsilon n > 1$, autrement dit $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$. Notons $m = E(nx)$ la partie entière de nx. On a donc $m \leq nx < m+1$. (et $x \geq m/n$) Donc

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$$

On a donc trouvé $r = \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

3.3. Propriété universelle.

Pour justifier que $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$, on peut passer par la propriété universelle suivante.

Théorème : *Pour tout corps $\mathbb{K}$ tel qu'il existe un homomorphisme injectif $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, il existe un unique homomorphisme de corps injectif $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ tel que $f = g \circ \varphi$.*

Ce théorème est le cas particulier d'un résultat plus profond qui dit essentiellement que le plus petit corps qui contient un anneau commutatif intègre est son corps des fractions à isomorphisme près.

Le résultat est fort, mais il faut maîtriser les éventuelles questions que le jury pourrait poser ensuite en rebondissant sur ce résultat : exemple d'un corps $\mathbb{K}$ vérifiant le théorème ? quelle est alors l'application f correspondante ? En quoi le résultat prouve que $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps "à isomorphisme près" qui contient $\mathbb{Z}$? Peut-on généraliser ce résultat à la construction du corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ par rapport à l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$?

4. Quelques références pour faire votre leçon

Vous trouverez sur internet plusieurs autres plans ou documents qui peuvent donner des idées pour la construction de votre propre plan pour cette leçon.

- `http://www.capes-de-maths.com/lecons/lecon15.pdf`
  Construction en analyse-synthèse, référence sans doute pour le début du plan du Groupe 2. A compléter par d'autres propriétés (ordre, dénombrabilité, ...).
- `http://www.capes-de-maths.com/lecons/lecon15.pdf`
  Assez complet (trop ?) mais pas de construction en analyse-synthèse. Contient également une partie sur les nombres décimaux et le développement décimal d'un rationnel (ancienne leçon) : peut être utile pour d'éventuelles questions sur le sujet lors de l'oral.
- `http://www.math.u-bordeaux.fr/ coulange/capes/decimaux3.pdf`
  Egalement sur le lien entre rationnels et développement décimal : utile à lire pour d'éventuelles questions.
- `http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.q.pdf`
  Pour aller plus loin dans la théorie de la construction : comment construire le corps des fractions d'un anneau commutatif intègre quelconque (propriété universelle, etc... avec application à la construction de $\mathbb{Q}$).