ORAL 44 - RECHERCHE DES ISOMÉTRIES DU PLAN CONSERVANT UN POLYGONE RÉGULIER ; EXEMPLES (TRIANGLE ÉQUILATÉRAL, CARRÉ, HEXAGONE, OCTOGONE,...)

1. Rappels des plans

1.1. Groupe 1.

Définition polygone quelconque.

(1) **Polygone régulier**
Définition : polygone régulier à n côtés défini à partir d'une rotation.
O est l'isobarycentre des sommets.
θ est de la forme $2k\pi/n$, $k \wedge n = 1$.

(2) **Isométries conservant P**

(a) **Isométries conservant P**
$Is(P)$ est un sous-groupe de $Is(E)$.
$Is(P) \subset Is(S)$.
Possibilités pour $f \in Is(P)$.
Démonstration.

(b) **Recherche des déplacements $Is^+(P)$**
$Is^+(P)$ est un sous-groupe de $Is(P)$.
$Is^+(P) = \{Id, r, \dots, r^{n-1}\}$.
Démonstration.

(c) **Recherche de $Is^-(P)$**
$Is^-(P) = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.
Axes de symétries des éléments de $Is^-(P)$.
Cas n pair, cas n impair.

(3) **Exemples**
Le triangle équilatéral
Le carré
L'hexagone
L'octogone

1.2. Groupe 2.

(1) **Polygone régulier**
Définition : polygone régulier à partir d'une rotation.
Propriétés : O est l'isobarycentre, θ est de la forme ....
Exemples : triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone, pentagone et pentagrame.

(2) **Isométries du plan conservant un polygone régulier**

(a) **Généralités**
Pour $X \subset E$, définition $Is(X)$, $Is^+(X)$, $Is^-(X)$.
$Is(X) \leq Is(E)$ et $Is^+(X) \trianglelefteq Is(X)$.
$Is^-(X)$ en bijection avec $sIs^+(X)$.
Point fixe des éléments de $Is(X)$.
Cas particuliers. cas possible pour $f \in Is(P)$.
$Is(P) = Is(S)$. Démonstration.

(b) **Etude de $Is^+(P)$**
$Is^+(P) =< r >$. Démonstration.
$Is^+(P) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(c) **Etude de $Is^-(P)$**
$Is^-(P) = \{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.
Cas n pair et n impair : axes de symétries.

(d) **Bilan**
$Is(P)$. $|Is(P)|$. $Is(P) \simeq \mathbb{D}_n$.
Caractérisation de Q, $|Q| = n$, $Is(Q) = 2n$.

(3) **Exemples**
Triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone.

2. Remarques sur les exposés

Tout d'abord, une précision, on dit bien "octOgone".

Les deux leçons présentées étaient assez bien fournies et construites de manière assez similaire. Dans le deuxième groupe, l'exposé était plus complet, mais un peu trop long, on a dépassé le temps imparti. Il faut savoir garder un court temps à la fin pour présenter les exemples, quitte à ne pas tous les présenter en détail.

Dans les deux leçons, on définit le polygone régulier à partir d'une rotation, il est intéressant alors de voir sur un exemple deux polygones réguliers distincts, construits avec deux rotations différentes (pentagone et pentagrame par exemple). Les polygones réguliers ne sont pas forcément convexes (à part si vous vous limitez à ce cas dans votre leçon mais alors, précisez-le !).

Si vous voulez parler du groupe diédral $\mathbb{D}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est très bien, mais il faut pouvoir le définir correctement. Qu'est-ce que le produit semi-direct ? Il n'est pas forcément utile de connaître toute la théorie, mais il faut en savoir un minimum si vous le mentionnez.

Attention à la commutativité ou non des éléments mentionnés : est-ce que deux rotations commutent ? deux symétries ? une rotation et une symétrie ? Il est bon de savoir répondre à ces questions, ou en tout cas de savoir retrouver les résultats rapidement.

3. Quelques compléments

3.1. **Groupe diédral.** On a vu que $Is(P) =< r, s >$ où $r^n = Id$, $s^2 = Id$ et $(r \circ s)^2 = Id$. Il y a donc deux sous-groupes qui sont clairement inclus dans $Is(P)$: le sous-groupe cyclique $R = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et le sous-groupe $S = \{Id, s\}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On voudrait donc traduire qu'un élément de $Is(P)$ peut s'écrire $f \circ g$ avec $f \in R$ et $g \in S$ et qu'il peut s'écrire aussi (k, ℓ) avec $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Bon il est clair que si $f = r^m$ et $g = s^\varepsilon$ avec $m \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on va prendre le couple $(k, \ell) = (m, \varepsilon)$.

Il faut donc trouver la loi de groupe correspondante. Nous on sait regarder la composée de $(f \circ g) \circ (f' \circ g')$.

En effet, puisque $s \circ r = r^{-1} \circ s$, on a pour $(i, j) \in \{0, \dots, n-1\}^2$ et $(\varepsilon, \delta) \in \{0, 1\}^2$,

$$(r^i \circ s^\varepsilon) \circ (r^j \circ s^\delta) = (r^i \circ s^\varepsilon \circ r^j \circ s^{-\varepsilon}) \circ (s^\varepsilon s^\delta)$$

Si $\varepsilon = 0$, $r^i \circ s^\varepsilon \circ r^j \circ s^{-\varepsilon} = r^{i+j}$. Si $\varepsilon = 1$, $r^i \circ s^\varepsilon \circ r^j \circ s^{-\varepsilon} = r^{i-j}$.

On peut donc définir notre loi de groupe sur l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui correspond à notre interprétation dans $Is(P)$:

$$(i, \varepsilon) * (j, \delta) = (i + (-1)^\varepsilon j, \varepsilon + \delta)$$

Formellement (et pas rigoureusement), on voit que ce n'est pas un produit direct (on n'a pas $(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y')$), c'est pourquoi on dit qu'on a un produit "semi-direct".

Pour être plus rigoureux, on a traduit une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si vous voulez un peu plus détail sur tout ça, je vous recommande le Combes, *Algèbre et géométrie, CAPES et Agrégation*, ou bien le Perrin, *cours d'algèbre*, qui expliquent plutôt bien ces notions. Mais ne mentionnez surtout pas le produit semi-direct isomorphe au groupe diédral si vous ne maîtrisez pas, cela vous évitera des questions du jury dessus.

Cependant, vous pouvez nommer $Is(P)$ comme le *groupe diédral d'ordre n* car c'est sa définition. Vous pouvez juste ne pas mentionner qu'il est isomorphe à un produit semi-direct (et s'ils vous demandent, vous répondez que vous ne connaissez pas trop la notion, et on ne vous le reprochera pas, ce n'est pas au programme du CAPES).

3.2. **Centre de $Is(P)$.** Le centre d'un groupe G est un sous-groupe de G qui contient tous les éléments (de G) qui commutent avec tous les éléments de G. Autrement dit

$$Z(G) = \{f \in G \ / \ \forall g \in G, f \circ g = g \circ f\}$$

Ici, on a caractérisé $Is(P) = \{Id, r, \dots, r^{n-1}, s \circ r, s \circ r^2, \dots s \circ r^{n-1}\}$ où r est la rotation qui engendre le polygone régulier (de centre O et d'angle $2k\pi/n$ avec $k \wedge n = 1$) et s est une symétrie dont l'axe passe par O et un sommet du polygone.

Déjà $Id \in Z(Is(P))$, puisque Id commute avec tout. On cherche alors un autre élément de $Z(Is(P))$.

Rappels :

- Deux rotations r et r' de même centre commutent.
- Si r et r' sont de centre distincts (pas le cas ici), elles commutent seulement si au moins une des deux est l'identité.
- Deux symétries axiales s et s' dont les axes sont parallèles (pas le cas ici) ne commutent pas, sauf si l'axe et le même et $s = s'$ car $s \circ s'$ est une translation
- Si s et s' ont des axes sécants en O, la composée $s \circ s'$ est une rotation, elles ne commutent pas, sauf si les axes sont les mêmes (et $s = s'$) ou si les axes sont perpendiculaires (car alors la rotation $s \circ s'$ devient la symétrie centrale)
- De manière générale, la composée $s \circ r$ n'est pas commutative, sauf si $r = Id$ ou si r est la rotation d'angle π et si le centre de r est sur l'axe de s.

Si $f \in Z(Is(P))$ est une symétrie, elle doit avoir son axe perpendiculaire simultanément aux $n-1$ autres axes des $n-1$ autres symétries de $Is(P)$, c'est donc impossible.

Si $f \in Z(Is(P))$ est une rotation, $f \neq Id$, elle doit être de centre O pour commuter avec les $n-2$ rotations restantes, et pour pouvoir commuter avec les symétries axiales, elle doit être d'angle π (et donc être une symétrie centrale).

Quand est-ce que la rotation d'angle π est dans $Is(P)$? Seulement lorsque n est pair (car si n est impair, l'image d'un sommet par la symétrie de centre O n'est plus un sommet).

En conclusion

$$Z(Is(P)) = \{Id_E\} \quad \text{si } n \text{ est impair}, \qquad Z(Is(P)) = \{Id_E, r^{n/2}\} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

3.3. **Construction du pentagone régulier convexe à la règle et compas.** Voici deux constructions possibles. On part à chaque fois d'un cercle de centre O donné et d'un point A sur le cercle dont on veut qu'il soit un sommet du pentagone.

Méthode 1. On place $B = s_O(A)$, $C = mil[OB]$ et $I = mil[OC]$. On trace une droite perpendiculaire au diamètre $[AB]$ passant par O. Cette droite coupe le cercle en deux points dont un qu'on note D. Soit $J = mil[OD]$, puis $\mathcal{C}'$ le cercle de centre I passant par J. Ce cercle coupe le diamètre $[AB]$ en deux points M et N. En traçant les droites perpendiculaires au diamètre $[AB]$ passant par M et N, on obtient les quatre autres points du pentagone sur le cercle.
En effet, $IJ = \sqrt{5}/4$ et si $N \in [OA]$, on a $ON = (\sqrt{5} - 1)/4 = Re(e^{2i\pi/5})$.

Méthode 2. On place $B = s_O(A)$. On trace une droite perpendiculaire au diamètre AB passant par O. Cette droite coupe le cercle en deux points dont un qu'on note C. Plaçons $I = mil[OC]$ puis $\mathcal{C}'$ le cercle de centre I passant par O. La droite (BI) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en deux points E et F. Alors les deux cercles de centre B et passant respectivement par E et F coupent le cercle d'origine en les quatre autres points du pentagone.
Passez en complexe, on a $IB = \sqrt{5}/2$ et le rayon du cercle de centre B passant par F (si $F \notin [IB]$) vaut donc $IB + 1/2$ et aussi $|\omega - 1|$ où ω est un des points cherchés. Traduisez en complexe, on obtient $Re(\omega) = (\sqrt{5} - 1)/4 = Re(e^{2i\pi/5})$.