

Etudiant 1 :

Cours :

Théorème de la bijection monotone

Exercice 1 :

Etudier la continuité et les prolongements par continuité éventuels de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x^2}$ sur un domaine à préciser.

Exercice 2 :

On considère l'équation (E_n) : $x \ln x = n$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution dans $[1, +\infty[$, noté x_n .
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_n$?

Etudiant 2 :

Cours :

Fonction continue en un point, continue à droite, à gauche, sur un intervalle.
Exemples et contre-exemples.

Exercice 1 :

On considère f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à déterminer.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution notée x_n .
3. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

Exercice 2 :

Etudier la continuité de la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} \text{ si } x \in]0, 1] \text{ et } f(0) = \frac{1}{3}$$

Etudiant 3 :

Cours :

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1 :

Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1-x^2}{\ln(x)} \text{ si } x > 1 \text{ et } f(x) = -2e^{x-1} \text{ si } x \leq 1.$$

Exercice 2 :

On considère la fonction $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n .
3. Etudier la monotonie de la suite (x_n) .

Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 3^x)^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{1/3} - x^{1/3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - 2 \ln(x)$$

Exercice 2 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et préciser si elles peuvent être prolongées par continuité :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad g : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$