Etudiant 1 :

Cours :
Théorème de la bijection monotone

Exercice 1 :
Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln x \quad \text{si } x > 0, \qquad \text{et } f(0) = 0$$

Exercice 2 :
On considère l'équation $(E_n) : x \ln x = n$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution dans $[1, +\infty[$, noté x_n.
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_n$?

Etudiant 2 :

Cours :
Fonction continue en un point, continue à droite, à gauche, sur un intervalle. Exemples et contre-exemples.

Exercice 1 :
On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution notée x_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

Exercice 2 :
Etudier la continuité, les éventuels prolongements et la dérivabilité de la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$ sur un domaine de définition à déterminer.

Etudiant 3 :

Cours :
Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1 :
Etudier la continuité, les éventuels prolongements et la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ sur un domaine de définition à déterminer.

Exercice 2 :
On considère la fonction $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
3. Etudier la monotonie de la suite (x_n).

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, préciser si elles peuvent être prolongées par continuité, et déterminer la dérivabilité et la fonction dérivée :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right), \qquad g : x \mapsto x^2 - |x|, \qquad h : x \mapsto x\sqrt{x^2 - x}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln x - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en donner une interprétation graphique.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f.