Etudiant 1 :

Cours :
Théorème du point fixe pour une suite récurrente.

Exercice 1 :
Déterminer les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 2 :

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par
$$f(x) = x \ln x \quad \text{si } x > 0, \qquad \text{et } f(0) = 0.$$
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'équation $x \ln x = n$ possède une unique solution dans $[1, +\infty[$, notée x_n.
3. Etudier la monotonie et la limite de la suite (x_n)

Exercice 3 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0.$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge.

Etudiant 2 :

Cours :
Théorème des encadrements

Exercice 1 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 2 :
Etudier les branches infinies de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+e^x}{x+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3 :
Etudier la continuité, les éventuels prolongements et la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}}$ sur un domaine de définition à déterminer.

Etudiant 3 :

Cours :
Suite convergente : définition et propriétés.

Exercice 1 :
Etudier les branches infinies de la fonction $f : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - 2|$ en fonction de n, puis la limite de (u_n).

Exercice 3 :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln x - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, préciser si elles peuvent être prolongées par continuité, et déterminer la dérivabilité et la fonction dérivée :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right), \qquad g : x \mapsto x^2 - |x|, \qquad h : x \mapsto x\sqrt{x^2 - x}$$

Exercice 2 :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 :
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$.
Montrer que la suite est convergente et préciser sa limite.

Exercice 4 :
Déterminer l'ensemble de définition, puis les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} + \ln(x), \quad g : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}, \quad h : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$