Etudiant 1 :

Cours :
Théorème de convergence des suites monotones

Exercice 1 :
Déterminer les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 2 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$. et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge.

Exercice 3 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}-2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - 2|$ en fonction de n, puis la limite de (u_n).

Etudiant 2 :

Cours :
Suites adjacentes : définition et théorème.

Exercice 1 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 2 :
Etudier les branches infinies de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+e^x}{x+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Etudier la monotonie de (u_n).
3. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite éventuelle.
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$ et retrouver le résultat de la question 3.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.
Montrer que la suite est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2 :
Etudier la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(1+u_n)^2}{4}$.