Etudiant 1 :

Cours :
Théorème des suites adjacentes : énoncé et démonstration

Exercice 1 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire la convergence et la limite de (u_n).

Exercice 2 :
On considère, pour tout entier $n \geq 0$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de (u_n).
3. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et déterminer un équivalent de $\frac{1}{n} - u_n$.

Etudiant 2 :

Cours :
Théorème de convergence des suites monotones

Exercice 1 :
Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \geq 1, u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.
On note pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 2 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3u_n + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Etudier la monotonie de (u_n), montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite éventuelle.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$ et retrouver le résultat précédent.

Etudiant 3 :

Cours :
Suites équivalentes : définitions. Liens entre limites de suites et équivalents.

Exercice 1 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 2 :
Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Que peut-on en déduire ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.
Montrer que la suite est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2 :

Etudier la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{(1+u_n)^2}{4}$.

Exercice 3 :

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$