Etudiant 1 :

Cours :
Théorème des suites adjacentes : énoncé et démonstration

Exercice 1 :
Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$ pour $n > 0$.

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \geq 0$
2. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.
   Montrer que $\forall x \in [0, 1], \dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq 2/3|u_n - \alpha|$.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 2 :
Calculer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ sur un domaine de définition à déterminer.

Etudiant 2 :

Cours :
Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

Exercice 1 :
Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \geq 1, u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On note pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 2 :
Déterminer la dérivée n-ième $(n \geq 2)$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-2x}$.

Etudiant 3 :

Cours :
Suites équivalentes : définitions. Liens entre limites de suites et équivalents.

Exercice 1 :
Soit $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \geq -1, f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 3/2$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [1, 3/2]$ admet une unique solution notée α.
3. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n \in [1, 3/2]$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 2 :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.
Déterminer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :
Etudier la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{(1+u_n)^2}{4}$.

Exercice 2 :
Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Exercice 3 :
Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 :
Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer l'unique point fixe α de f.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Déterminer un entier N tel que $|u_N - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 5 :

1. Montrer que
$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
2. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est convergente et déterminer sa limite.