Etudiant 1 :

Cours :
Montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

Exercice 1 :
Factoriser les polynômes suivants :

$$P(X) = -X^3 + X^2 + 10X + 8, \quad Q(X) = X^3 - X + 3X$$

Exercice 2 :
Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Etudier la continuité, la dérivabilité et la convexité de f sur $[0,1[$.
2. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et préciser la tangente de $\mathcal{C}_f$ en ce point.
3. Montrer que f admet une réciproque, la calculer et déterminer sa dérivée.

Exercice 3 :
Calculer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ sur un domaine de définition à déterminer.

Etudiant 2 :

Cours :
Définition et caractérisation des fonctions convexes.

Exercice 1 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe.
Montrer que f admet une réciproque, et déterminer sa dérivée et sa convexité.

Exercice 2 :
Factoriser les polynômes suivants :

$$P(X) = X^3 + 2X^2 - 21X + 18, \quad Q(X) = -X^3 + 2X^2 - X + 12$$

Exercice 3 :
Déterminer la dérivée n-ième $(n \geq 2)$ de la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$.

Etudiant 3 :

Cours :
Inégalités des accroissements finis.

Exercice 1 :
Factoriser les polynômes suivants :

$$P(X) = X^3 + X + 12, \quad Q(X) = X^3 + 4X^2 - 7X - 10$$

Exercice 2 :
Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et $\forall x > 0, f(x) = x^3 \ln x + 1$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. Préciser les points d'inflexions de f.
4. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ admet une réciproque et déterminer sa dérivée.

Exercice 3 :
Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \ln(1 + x)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Déterminer l'unique point fixe α de f.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,2]$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Déterminer un entier N tel que $|u_N-\alpha|\leq 10^{-4}$.

Exercice 2 :

Soit $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\geq -1, f(x)=(x+1)^2e^{-x}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=3/2$ et $\forall n\geq 0,\ u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1,+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in[1,3/2]$ admet une unique solution notée α.
3. Montrer que $\forall n\geq 0, u_n\in[1,3/2]$
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 3 :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{e^{u_n}}{u_n+2}$ pour $n>0$.

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n\geq 0$
2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

   Montrer que $\forall x\in[0,1], \dfrac{1}{4}\leq f'(x)\leq\dfrac{2}{3}$
3. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq 2/3|u_n-\alpha|$.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.