Etudiant 1 :

Cours :
Dérivation d'une application réciproque. Théorème, interprétation géométrique et exemple.

Exercice 1 :
Factoriser les polynômes suivants :
$P(X) = -X^3 + X^2 + 10X + 8$, $Q(X) = X^3 - X + 3$.

Exercice 2 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
On admettra que la suite (u_n) est à termes dans $[0,1]$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature (et somme ?) de la série de terme général u_n^2.
3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

Exercice 3 :
Calculer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ sur un domaine de définition à déterminer.

Etudiant 2 :

Cours :
Fonctions convexes, points d'inflexions : définitions et caractérisations.

Exercice 1 :
Déterminer la convergence (et la somme ?) de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Exercice 2 :
Factoriser les polynômes suivants :
$P(X) = X^3 + 2X^2 - 21X + 18$, $Q(X) = -X^3 + 2X^2 - X + 12$.

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
Montrer que f admet une réciproque, et déterminer sa dérivée et sa convexité.

Etudiant 3 :

Cours :
Définition d'une série convergente, d'une série absolument convergente. Exemples.

Exercice 1 :
Factoriser les polynômes suivants :
$P(X) = X^3 + X + 12$, $Q(X) = X^3 + 4X^2 - 7X - 10$.

Exercice 2 :
Montrer que $\forall n \geq 1, \dfrac{1}{4n^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.
En déduire la convergence ou non de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et $\forall x > 0, f(x) = x^3 \ln x + 1$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. Préciser les points d'inflexions de f.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Déterminer l'unique point fixe α de f.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,2]$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Déterminer un entier N tel que $|u_N-\alpha|\leq 10^{-4}$.

Exercice 2 :

Soit $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\geq -1, f(x)=(x+1)^2e^{-x}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=3/2$ et $\forall n\geq 0,\ u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1,+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in[1,3/2]$ admet une unique solution notée α.
3. Montrer que $\forall n\geq 0, u_n\in[1,3/2]$
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 3 :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{e^{u_n}}{u_n+2}$ pour $n>0$.

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n\geq 0$
2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

   Montrer que $\forall x\in[0,1], \dfrac{1}{4}\leq f'(x)\leq\dfrac{2}{3}$
3. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq 2/3|u_n-\alpha|$.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 4 :

1. Vérifier que $\forall n\geq 1, \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$
2. En déduire la convergence (et la somme) de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 5 :

1. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\ln(k+1)-\ln(k)\leq\dfrac{1}{k}$
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$.

Exercice 6 :

1. Montrer que $\forall n\geq 2,\quad \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{n^2}\leq\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.
2. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$