Etudiant 1 :

Cours :
Séries géométriques et dérivées.

Exercice 1 :
Factoriser le polynôme suivant $P(X) = -X^3 + X^2 + 10X + 8$.

Exercice 2 :
Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{4(-1)^n}{(n+1)!}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 3 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
On admettra que la suite (u_n) est à termes dans $[0,1]$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature et la somme de la série de terme général u_n^2.
3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

Etudiant 2 :

Cours :
Théorème d'identification des coefficients polynômiaux.
Propriétés du degré des polynômes : $P+Q$, PQ, P'.

Exercice 1 :
Déterminer la convergence (et la somme si possible) de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Exercice 2 :
Factoriser le polynôme $P(X) = -X^3 - X^2 + 3X + 2$

Exercice 3 :
Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent et déterminer leur somme :

$$u_n = \frac{n}{3^{2n+1}}, \quad v_n = \frac{n(n-1)8^{n+1}}{n!}$$

Etudiant 3 :

Cours :
Définition d'une série convergente, d'une série absolument convergente. Exemples.

Exercice 1 :
Factoriser le polynôme suivant : $P(X) = X^3 + X + 10$.

Exercice 2 :
Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont convergentes et déterminer leur somme :

$$u_n = \frac{4n^2 + 5n}{5^n}, \quad v_n = \frac{n+3}{2^n n!}$$

Exercice 3 :
Montrer que $\forall n \geq 1, \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$. En déduire la convergence (et la somme si possible) de la série numérique de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

1. Vérifier que $\forall n \geq 1, \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$
2. En déduire la convergence et la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 2 :

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$.

Exercice 3 :

1. Montrer que $\forall n \geq 2, \quad \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$