Etudiant 1 :

Cours : Dénombrement des combinaisons.

Exercice 1 :
Montrer que les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{4(-1)^n}{(n+1)!}$ et $v_n = \dfrac{n(n+1)}{5^n}$ convergent et déterminer leur somme.

Exercice 2 :
On range au hasard cinq jetons numérotés de 1 à 5 dans quatre boîtes numérotées de 1 à 4.

1. Quel est le nombre total de rangements possibles ?
2. Pour combien de ces rangements une des boîtes contient-elle trois jetons ?
3. Quel est le nombre de rangements pour lesquels une seule boîte est vide ?

Exercice 3 :
Soit k un entier de $\{1, 2, \dots, 8\}$. De combien de façons peut-on placer k tours identiques sur un échiquier, de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par les autres ?

Etudiant 2 :

Cours : Séries géométriques et dérivées

Exercice 1 :
Au loto, on doit cocher 5 cases dans une grille numérotée de 1 à 49.
1. Quel est le nombre de grilles différentes que l'on peut former ?
2. On a une grille gagnante si celle-ci contient au moins deux numéros parmi les cinq tirés.
a. Calculer le nombre de grilles perdantes.
b. Calculer le nombre de grilles qui présentent exactement deux bons numéros.
c. Calculer le nombre de grilles qui présentent au moins quatre bons numéros.

Exercice 2 :
Montrer que les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{n}{3^{2n+1}}$ et $v_n = \dfrac{n(n-1)8^{n+1}}{n!}$ convergent et déterminer leur somme.

Exercice 3 :
Dans une classe de 30 élèves, de combien de manières différentes peut-on former 10 groupes de colles de 3 élèves ?

Etudiant 3 :

Cours : Formule du crible pour $n = 4$. Cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles.

Exercice 1 :
Montrer que les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{4n^2 + 5n}{5^n}$ et $v_n = \dfrac{n+3}{2^n n!}$ sont convergentes et déterminer leur somme.

Exercice 2 :
On mélange les 32 cartes d'un jeu, puis on les distribue une à une successivement sans remise. Combien y a-t-il de possibilités pour que

1. La dixième carte est l'as de pique.
2. Les quatre premières cartes forment un carré.
3. Tous les piques sont distribués en premier.

Exercice 3 :
De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex-aequo ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln(u_n)$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2 :

Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0. On note S_n et R_n les sommes partielles et restes de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série converge et que $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Exercice 3 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 8 cartes. On obtient ainsi une "main".

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains qui contiennent au moins un roi ?
3. Combien y a-t-il de mains qui contiennent une dame ou un coeur ?
4. Combien y a-t-il de mains comportant exactement 3 carreaux et un valet ?

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel non nul. Combien y a-t-il d'applications surjectives de $\{1, \ldots, n+1\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$?

Exercice 5 :

Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPPI et ABRACADABRA.