

**Etudiant 1 :**

**Cours :**

Formule du binôme pour les matrices. Définition des matrices inversibles, inversibilité des matrices diagonales.

**Exercice 1 :** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système : 
$$\begin{cases} x - y + z = m \\ mx + y - z = 1 \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

**Exercice 2 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A^3 = 6A - A^2$ , puis qu'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $A^n = a_n A^2 + b_n A$  pour  $n \geq 2$ .

3. Déterminer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ , et en déduire l'expression de  $A^n$ .

**Etudiant 2 :**

**Cours :** Espace vectoriel engendré par  $p$  vecteurs, propriétés de stabilité.

**Exercice 1 :** Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = 2I + A$ .

1. Déterminer les puissances de  $B$ .

2. Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  les suites définies par 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

Déterminer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .

**Exercice 2 :** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système 
$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}.$$

**Etudiant 3 :**

**Cours :** Systèmes linéaires, homogènes, de Cramer. Opérations élémentaires.

**Exercice 1 :** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système : 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + z = m \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

**Exercice 2 :**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$ , il existe un

réel  $a_n$  tel que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $a_n$  en fonction de  $n$ , puis l'expression  $A^n$  en fonction de  $n$ .

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 1** Déterminer si les applications suivantes sont surjectives ou non.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x - 2y), \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, -x + 2y, 5x - y), \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, 2y + x)$$

**Exercice 2** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^3 - 4A^2 + A + 6I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 3** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $a_n$  tel que  $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$ . Déterminer alors  $A^n$  en fonction de  $n$ .