Etudiant 1 :

Cours : Famille génératrice d'un espace vectoriel. Propriétés.

Exercice 1 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 2I + A$.
1. Déterminer les puissances de B.
2. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) les suites définies par $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \quad (n \geq 1). \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$
Déterminer a_n, b_n et c_n en fonction de n, a_1, b_1 et c_1.

Exercice 2 :
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

Etudiant 2 :

Cours :
Formule du binôme pour les matrices. Définition des matrices inversibles.

Exercice 1 :
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$, puis qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $A^n = a_n A^2 + b_n A$ pour $n \geq 2$.
3. Déterminer a_n et b_n en fonction de n, et en déduire l'expression de A^n.

Etudiant 3 :

Cours : Définition d'un espace vectoriel, d'un sous-espace vectoriel.

Exercice 1 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$. Déterminer a_n en fonction de n, puis l'expression A^n en fonction de n.

Exercice 2 :
Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Déterminer si les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{array}$ sont surjectives ou non.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes : $\begin{cases} x - y + z &= m \\ mx + y - z &= 1 \\ x - y + mz &= 1 \end{cases}$, $\begin{cases} mx + y + z &= m^2 \\ x + my - mz &= m \\ x - y + mz &= 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ mx + y + z &= m \\ x + my + z &= 1 \\ x + y + mz &= m \end{cases}$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 4A^2 + A + 6I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3$. Déterminer alors A^n en fonction de n.

Exercice 5. Montrer que la famille $((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.