## Etudiant 1 :

**Cours :** Familles libres, familles liées dans un espace vectoriel. Propriétés.

**Exercice 1 :** Soit $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs propres de $A$. La matrice $A$ est-elle inversible ?
2. Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $A$, montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

**Exercice 2 :** $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0 \right\}$.
Montrer que $E$ est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

**Exercice 3 :** Déterminer si $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base ou non de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si oui, déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans cette base.

## Etudiant 2 :

**Cours :** Familles génératrices d'un espace vectoriel. Propriétés.

**Exercice 1 :** $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ -x+2y=y+6z \text{ et } y+3z=-2x \right\}$.
Montrer que $E$ est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

**Exercice 2 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs propres de $A$. La matrice $A$ est-elle inversible ?
2. Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $A$, montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

**Exercice 3 :** Déterminer si $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base ou non de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si oui, déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans cette base.

## Etudiant 3 :

**Cours :** Théorème d'identification pour les familles libres.

**Exercice 1 :** Déterminer si $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base ou non de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si oui, déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans cette base.

**Exercice 2 :** $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \ / \ 2x-y+2z-t=0 \text{ et } y+z-t=0 \right\}$.
Montrer que $E$ est un espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.

**Exercice 3 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs propres de $A$. La matrice $A$ est-elle inversible ?
2. Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $A$, montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 1**. Déterminer si les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, x-2y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, -x+2y, 5x-y) \end{array}$ sont surjectives ou non.

**Exercice 2**. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes : $\left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & m \\ mx+y-z & = & 1 \\ x-y+mz & = & 1 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{rcl} mx+y+z & = & m^2 \\ x+my-mz & = & m \\ x-y+mz & = & 1 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ mx+y+z & = & m \\ x+my+z & = & 1 \\ x+y+mz & = & m \end{array} \right.$.

**Exercice 3**. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 4A^2 + A + 6I_3$. En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

**Exercice 4**. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $a_n$ tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3$. Déterminer alors $A^n$ en fonction de $n$.

**Exercice 5**. Montrer que la famille $((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.