Etudiant 1 :

Cours :
Bijection : définition et caractérisation. Bijection réciproque.

Exercice 1 :

Déterminer les limites de $u_n = \dfrac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}}$, et $v_n = \dfrac{\sqrt[4]{1 + \dfrac{1}{n}} - 1}{n\left(\cos\dfrac{1}{n} - 1\right)}$.

Exercice 2 :
Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

Etudiant 2 :

Cours :
Suites négligeables, suites équivalentes : définitions et exemples.

Exercice 1 :

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.
Montrer que h réalise une bijection de son domaine de définition sur un intervalle que l'on déterminera.
Déterminer alors l'expression de sa fonction réciproque.

Exercice 2 :

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right), \quad v_n = n\left(\cos\frac{1}{n} - \ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right)$$

Etudiant 3 :

Cours :
Fonctions continues en un point. Exemples et contre-exemples.

Exercice 1 :
Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \binom{n}{k} \ (k \text{ fixé}), \quad v_n = \frac{\sqrt[3]{1 + \sin\dfrac{1}{n}} - e^{1/3n}}{\sin\dfrac{1}{n} + \tan\dfrac{1}{n}}$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

1. Donner le domaine de définition de f, et montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction g.
2. En utilisant les suites $\left(\frac{2}{2n+1}\right)_n$ et $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$, étudier la limite éventuelle de $h : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
3. Etudier la continuité de f sur $\left]\frac{2}{5}, 1\right[$, sur $]0,1[$, et celle de g sur $\mathbb{R}^+$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x+1)^{1/x} - x^{1/x}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+a)}{\ln(x)}\right)$$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{(\pi-2x)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{x})^5 - 1}{x-\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 2^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $\forall x > 0,\ f(x) = (e^x + 2x)^{1/x}$.
La fonction f est-elle prolongeable par continuité ?