Etudiant 1 :

Cours :
Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue. Théorème de la bijection continue strictement monotone.

Exercice 1 :
Donner les domaines de définition et calculer les dérivées de

$$f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right), \quad g : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 :
Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

Etudiant 2 :

Cours :
Théorème de Rolle.
Théorème des Accroissements finis, Inégalité des Accroissements finis.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. 2. Montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 2 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(\sin x)}{x} = 0$$

Etudiant 3 :

Cours :
Fonctions continues en un point. Prolongement par continuité d'une fonction en un point. Exemples et contre-exemples.

Exercice 1 :
Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Exercice 2 :
Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)}\right)^n$$

(Indication : On pourra noter $f : x \mapsto \ln(Arctan(x))$ et utiliser des théorèmes de dérivabilité en les justifiant).

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x+1)^{1/x} - x^{1/x}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+a)}{\ln(x)}\right)$$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{(\pi-2x)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sqrt{x})^5-1}{x-\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 2^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $\forall x > 0,\ f(x) = (e^x + 2x)^{1/x}$.
La fonction f est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 4

On pose $f : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. On note Arcsin la réciproque de f. Tracer le graphe de Arcsin.
3. Pour quelles valeurs de x et de y les quantités $\sin(\mathrm{Arcsin} y)$ et $\mathrm{Arcsin}(\sin x)$ sont-elles bien définies ? Donner leurs valeurs.
4. Montrer que pour tout $y \in [-1,1]$, $\cos(\mathrm{Arcsin}(y)) = \sqrt{1+y^2}$.